

# Cliques statiques et temporelles : algorithmes d'énumération et de détection de communautés

---

Alexis BAUDIN

14 décembre 2023

Soutenance de thèse

Thèse encadrée par Clémence MAGNIEN et Lionel TABOURIER



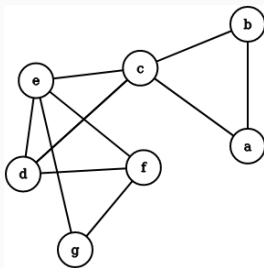
- 1 - Contexte de la thèse et définitions
- 2 - Énumération des bicliques maximales
- 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens
- 4 - Conclusion et perspectives

# **1 - Contexte de la thèse et définitions**

---

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Les graphes

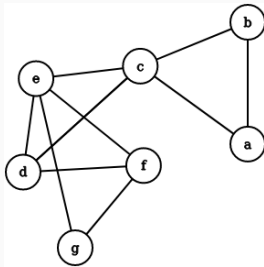


### Graphe

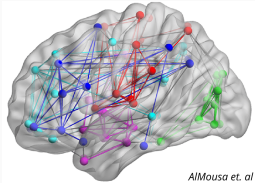
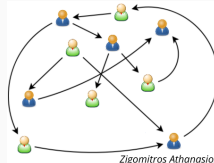
- Sommets :  $a, b, \dots, g$
- Interactions : arêtes  
 $\{a, b\}, \{a, c\}, \dots$

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Les graphes



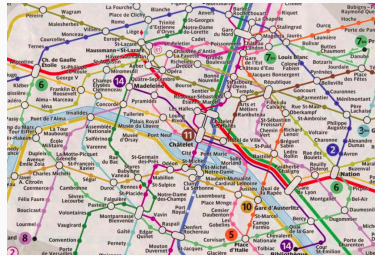
## Exemples



*AlMousa et. al*

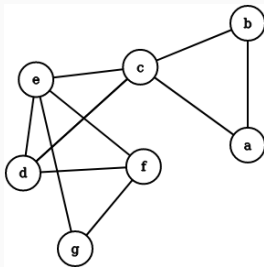
## Graphe

- Sommets :  $a, b, \dots, g$
- Interactions : arêtes  $\{a, b\}, \{a, c\}, \dots$

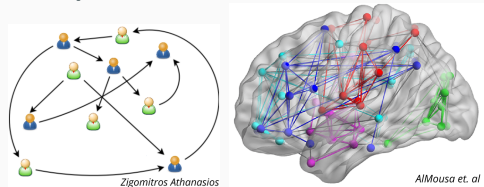


# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Les graphes

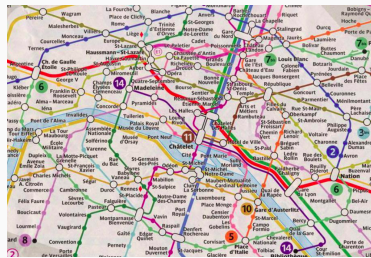


## Exemples



## Graphe

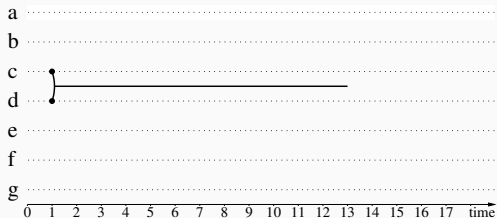
- Sommets :  $a, b, \dots, g$
- Interactions : arêtes  $\{a, b\}, \{a, c\}, \dots$



⇒ Interactions statiques

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Interactions temporelles : les flots de liens

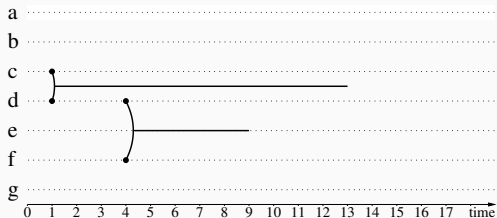


### Flot de liens

- Sommets :  $a, b, \dots, g$
- Temps :  $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
  - $c, d$  lien sur  $[1, 13]$

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Interactions temporelles : les flots de liens



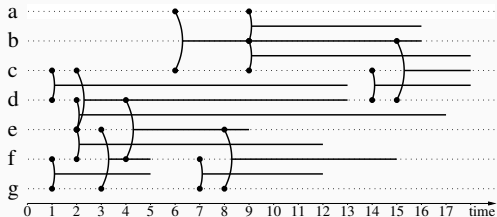
### Flot de liens

- Sommets :  $a, b, \dots, g$
- Temps :  $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
  - $c, d$  lien sur  $[1, 13]$
  - $d, f$  lien sur  $[4, 9]$



# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Interactions temporelles : les flots de liens

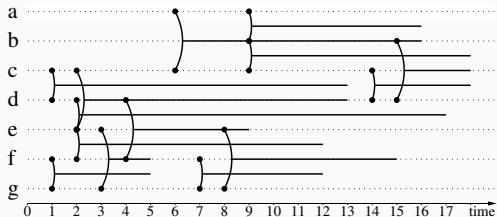


### Flot de liens

- Sommets :  $a, b, \dots, g$
- Temps :  $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
  - $c, d$  lien sur  $[1, 13]$
  - $d, f$  lien sur  $[4, 9]$
  - ...

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Interactions temporelles : les flots de liens



### Flot de liens

- Sommets :  $a, b, \dots, g$
- Temps :  $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
  - $c, d$  lien sur  $[1, 13]$
  - $d, f$  lien sur  $[4, 9]$
  - ...

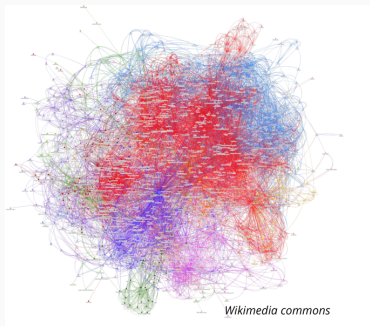
### Avantages

- traiter directement le flux des interactions
- pas de choix arbitraire d'une échelle de temps
- le temps peut être continu

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Graphes massifs issus du monde réel

### De plus en plus de données



→  $10^6$  articles Wikipedia francophone

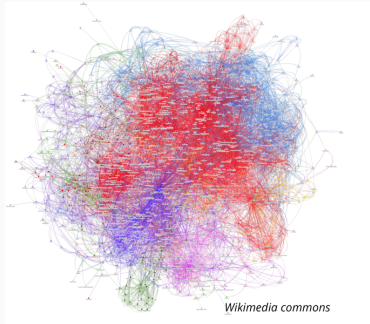
→  $10^9$  utilisateurs Facebook

→  $10^{11}$  neurones humains

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Graphes massifs issus du monde réel

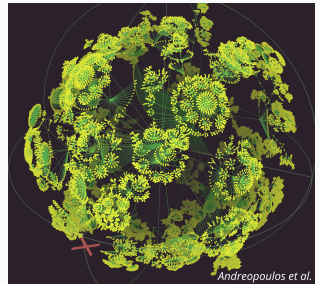
### De plus en plus de données



- $10^6$  articles Wikipedia francophone
- $10^9$  utilisateurs Facebook
- $10^{11}$  neurones humains

### Graphe réel $\neq$ graphe tiré aléatoirement

- peu denses ;
- degrés hétérogènes ;
- densité locale ;
- ...

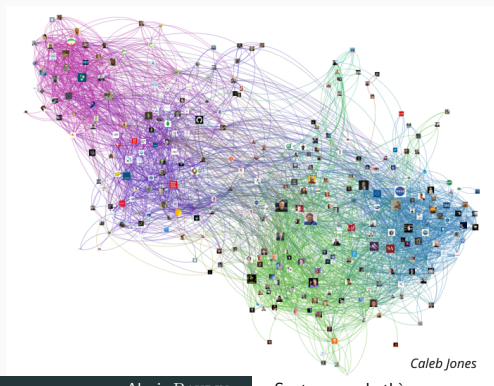


# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Étude des communautés

### Étudier les sous-graphes denses :

- Cibler les zones à forte densité d'interactions
- Comprendre la structure d'organisation des interactions
- Zoomer en avant et en arrière sur les données

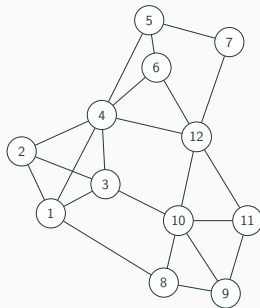


# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Étude des communautés

### Communautés : ensembles de sommets

- Densément connectés à l'intérieur
- Peu connectés au reste du graphe



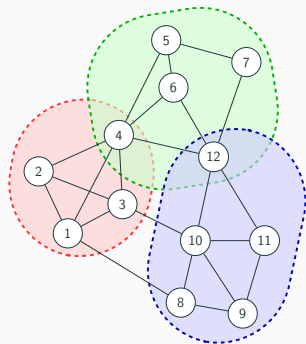
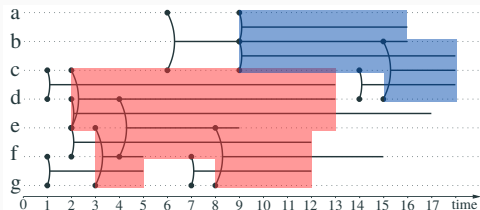


# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Étude des communautés

**Communautés** : ensembles de sommets / sommets temporels

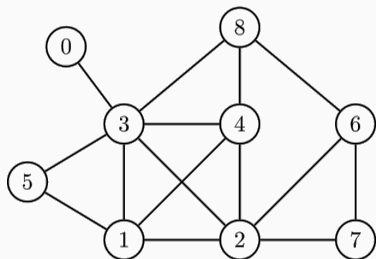
- Densément connectés à l'intérieur
- Peu connectés au reste du graphe / du flot





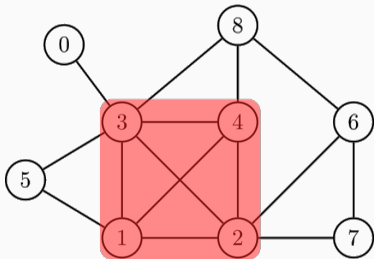
# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques



# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques



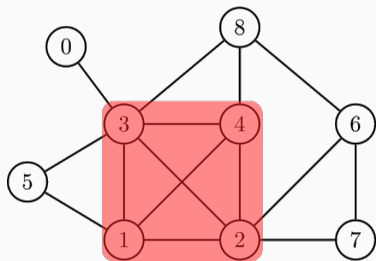
- $\{1, 2, 3, 4\}$  clique

### Clique d'un graphe

Ensemble de sommets tous connectés entre eux.

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques



- $\{1, 2, 3, 4\}$  clique **maximale**
- $\{1, 2, 3\}$  clique **non maximale**

### Clique d'un graphe

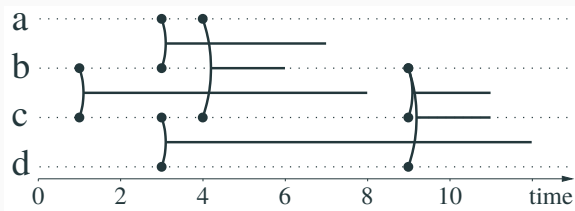
Ensemble de sommets tous connectés entre eux.

### Clique maximale

Incluse dans aucune autre clique.

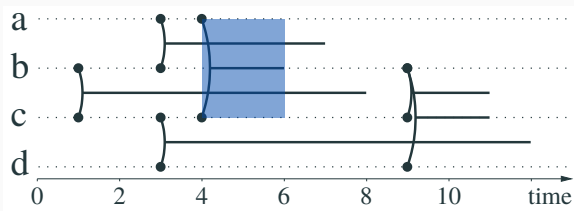
# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques



# 1 - Contexte de la thèse et définitions

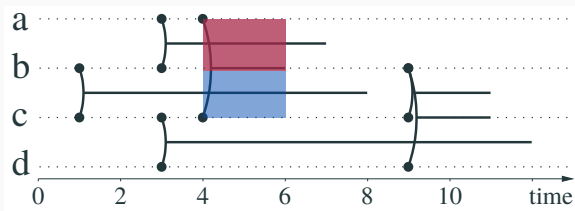
## > Énumération des cliques



$(\{a, b, c\}, [4, 6])$  est une clique

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques

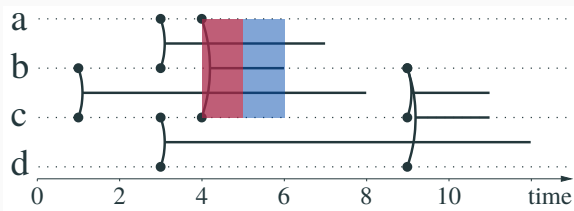


$(\{a, b, c\}, [4, 6])$  est une clique

→  $(\{a, b\}, [4, 6])$  n'est pas maximale en sommets

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques



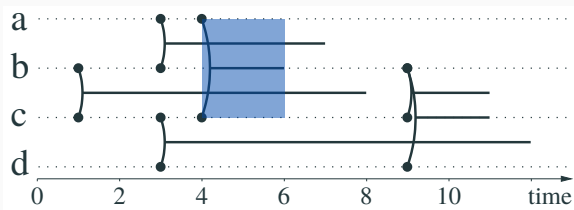
$(\{a, b, c\}, [4, 6])$  est une clique

→  $(\{a, b\}, [4, 6])$  n'est pas maximale en sommets

→  $(\{a, b, c\}, [4, 5])$  n'est pas maximale en temps

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques



$(\{a, b, c\}, [4, 6])$  est une clique

→  $(\{a, b\}, [4, 6])$  n'est pas maximale en sommets

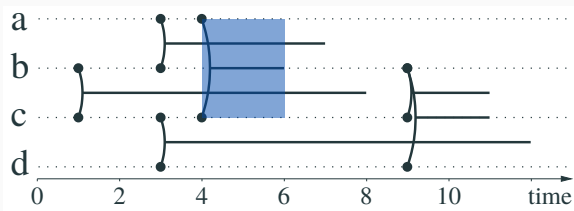
→  $(\{a, b, c\}, [4, 5])$  n'est pas maximale en temps

**maximale** = en sommets et en temps



# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Énumération des cliques



$(\{a, b, c\}, [4, 6])$  est une clique maximale.

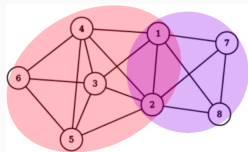
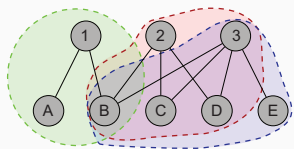
→  $(\{a, b\}, [4, 6])$  n'est pas maximale en sommets

→  $(\{a, b, c\}, [4, 5])$  n'est pas maximale en temps

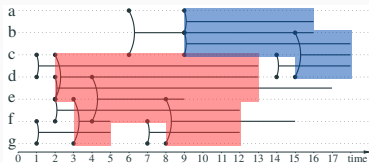
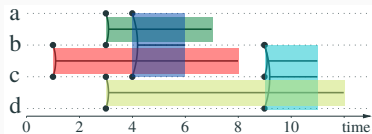
**maximale** = *en sommets et en temps*

# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Contributions algorithmiques

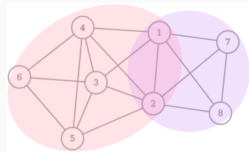
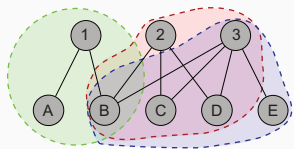


	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales</i> <i>graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales</i> <i>flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>flots de liens [BTM23]</i>

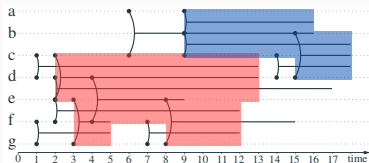
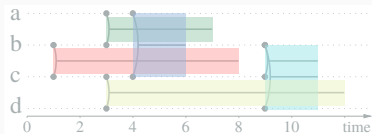


# 1 - Contexte de la thèse et définitions

## > Contributions algorithmiques

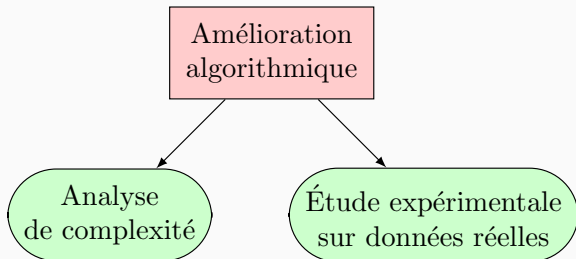


	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales</i> <i>graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales</i> <i>flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>flots de liens [BTM23]</i>



Pour chaque contribution :

passage à l'échelle de réseaux massifs issus du monde réel.

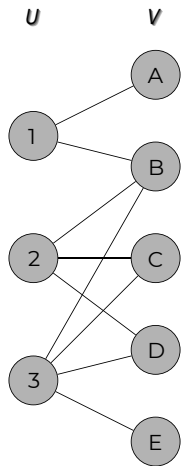


## 2 - Énumération des bicliques maximales

---

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Graphes bipartis et bicliques

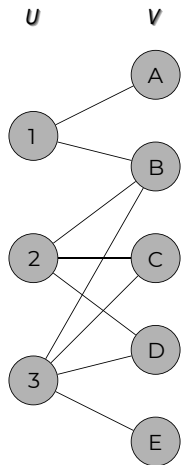


**Graphe biparti**  $G = (U, V, E)$

- $U$  et  $V$  : ensembles de sommets disjoints ;
- $E$  : interactions entre  $U$  et  $V$  ;

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Graphes bipartis et bicliques



**Grphe biparti**  $G = (U, V, E)$

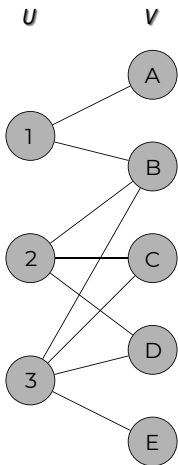
- $U$  et  $V$  : ensembles de sommets disjoints ;
- $E$  : interactions entre  $U$  et  $V$  ;

**Modélise interactions du monde réel**

- Plateformes en ligne ;
- Publications scientifiques ;
- ...

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Graphes bipartis et bicliques



**Grphe biparti**  $G = (U, V, E)$

- $U$  et  $V$  : ensembles de sommets disjoints ;
- $E$  : interactions entre  $U$  et  $V$  ;

**Modélise interactions du monde réel**

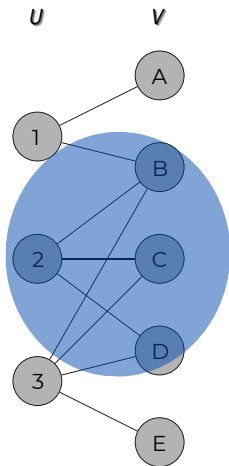
- Plateformes en ligne ;
- Publications scientifiques ;
- ...

**Équivalent aux hypergraphes**



## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bicliques d'un graphe biparti



#### Biclique

$C_U \cup C_V$  avec  $C_U \subseteq U$ ,  $C_V \subseteq V$ .

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$ ,  $u$  et  $v$  connectés.

#### Biclique maximale

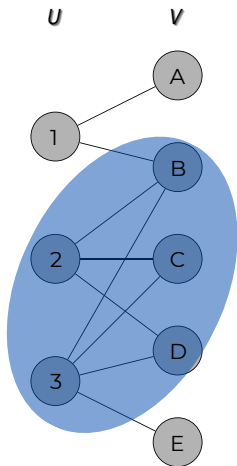
Incluse dans aucune autre.

#### Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$  non maximale

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bicliques d'un graphe biparti



#### Biclique

$C_U \cup C_V$  avec  $C_U \subseteq U$ ,  $C_V \subseteq V$ .

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$ ,  $u$  et  $v$  connectés.

#### Biclique maximale

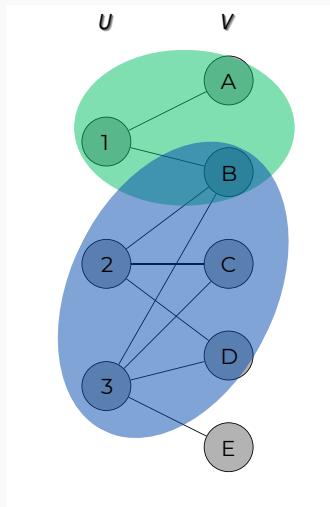
Incluse dans aucune autre.

#### Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$  non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$  maximale

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bicliques d'un graphe biparti



#### Biclique

$C_U \cup C_V$  avec  $C_U \subseteq U$ ,  $C_V \subseteq V$ .

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$ ,  $u$  et  $v$  connectés.

#### Biclique maximale

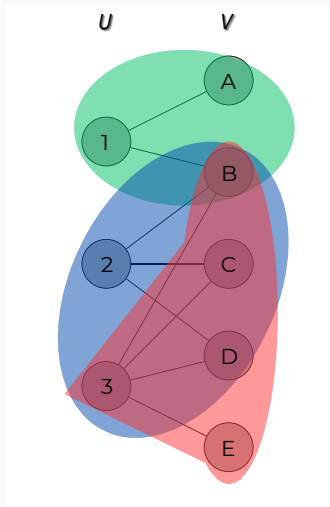
Incluse dans aucune autre.

#### Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$  non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$  maximale
- $\{1, A, B\}$  maximale

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bicliques d'un graphe biparti



#### Biclique

$C_U \cup C_V$  avec  $C_U \subseteq U$ ,  $C_V \subseteq V$ .

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$ ,  $u$  et  $v$  connectés.

#### Biclique maximale

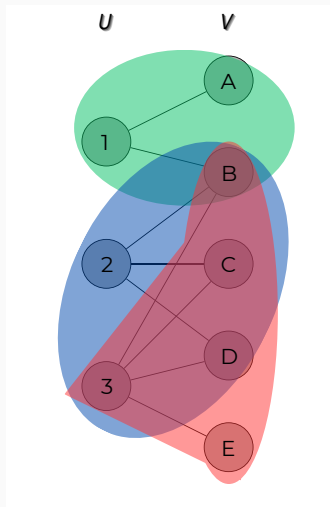
Incluse dans aucune autre.

#### Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$  non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$  maximale
- $\{1, A, B\}$  maximale
- $\{3, B, C, D, E\}$  maximale

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bicliques d'un graphe biparti



#### Biclique

$C_U \cup C_V$  avec  $C_U \subseteq U$ ,  $C_V \subseteq V$ .

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$ ,  $u$  et  $v$  connectés.

#### Biclique maximale

Incluse dans aucune autre.

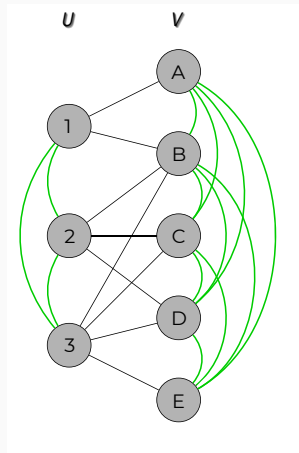
#### Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$  non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$  maximale
- $\{1, A, B\}$  maximale
- $\{3, B, C, D, E\}$  maximale

⇒ **Contribution** : énumération dans les graphes massifs réels.

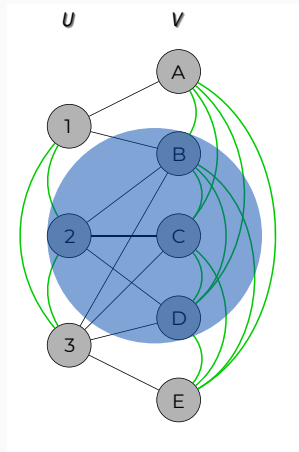
## 2 - Énumération des bicliques maximales

>  $\tilde{G}$  : graphe étendu d'un graphe biparti



## 2 - Énumération des bicliques maximales

>  $\tilde{G}$  : graphe étendu d'un graphe biparti



### Théorème

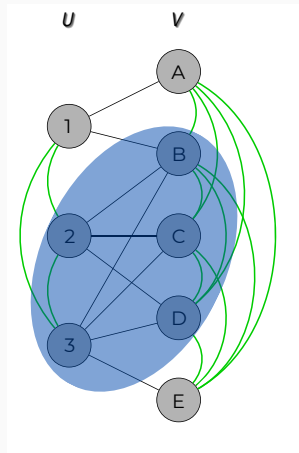
- Les cliques de  $\tilde{G}$  sont les bicliques de  $G$  ;
- Les cliques **maximales** de  $\tilde{G}$  sont les bicliques **maximales** de  $G$ .

### Exemple

- $\{2, B, C, D\}$  clique/biclique non maximale

## 2 - Énumération des bicliques maximales

>  $\tilde{G}$  : graphe étendu d'un graphe biparti



### Théorème

- Les cliques de  $\tilde{G}$  sont les bicliques de  $G$  ;
- Les cliques **maximales** de  $\tilde{G}$  sont les bicliques **maximales** de  $G$ .

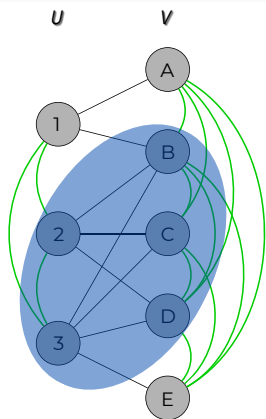
### Exemple

- $\{2, B, C, D\}$  clique/biclique non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$  clique/biclique maximale



## 2 - Énumération des bicliques maximales

>  $\tilde{G}$  : graphe étendu d'un graphe biparti



⇒ **Algorithme :**  
énumérer les cliques  
maximales de  $\tilde{G}$

### Théorème

- Les cliques de  $\tilde{G}$  sont les bicliques de  $G$  ;
- Les cliques **maximales** de  $\tilde{G}$  sont les bicliques **maximales** de  $G$ .

### Exemple

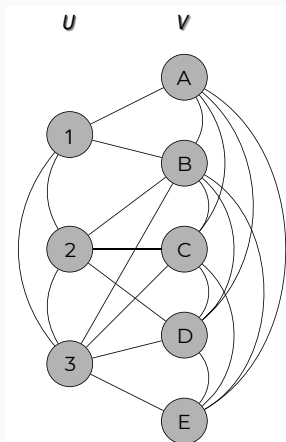
- $\{2, B, C, D\}$  clique/biclique non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$  clique/biclique maximale

## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

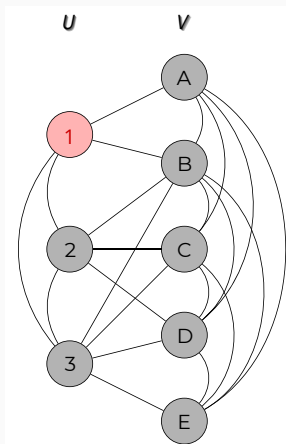


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

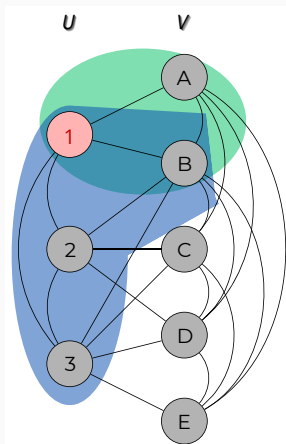


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

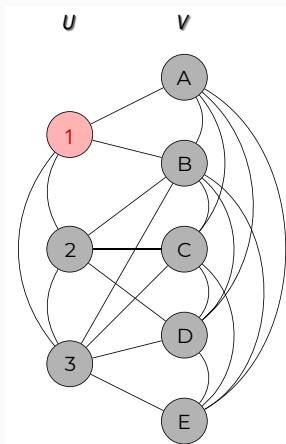


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

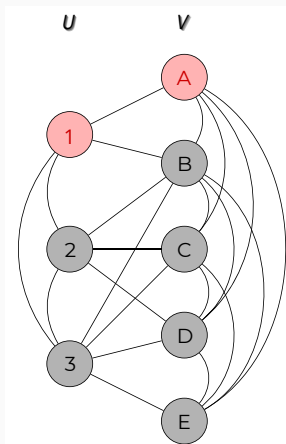


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

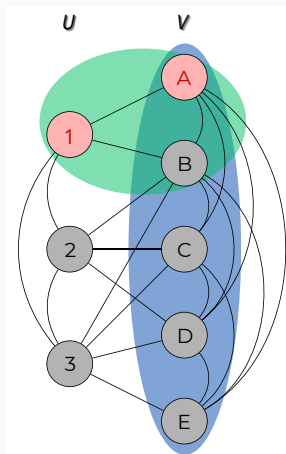


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

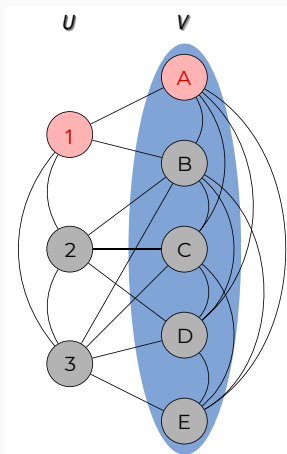


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).



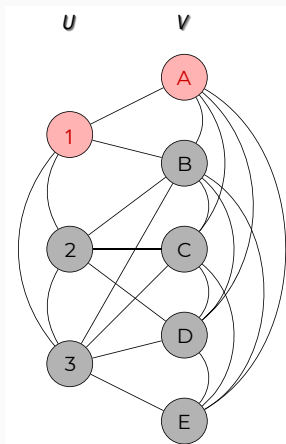


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

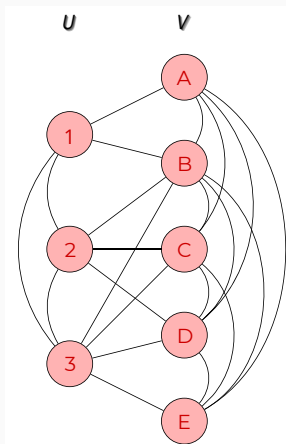


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

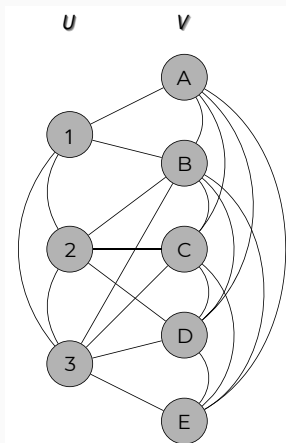


## 2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu  $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

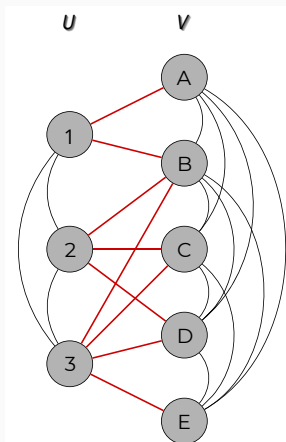
→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).



## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bron-Kerbosch sur le graphe étendu $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch



→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

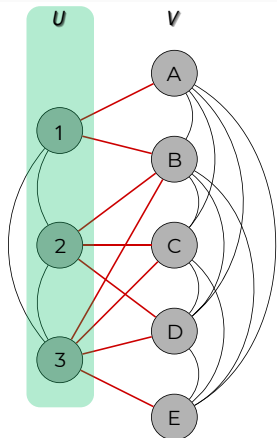
**BBK : tirer parti de la bipartition**

→  $\tilde{G}$  trop dense : utiliser les **voisinages bipartis** ;

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bron-Kerbosch sur le graphe étendu $\tilde{G}$

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch



→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

**BBK : tirer parti de la bipartition**

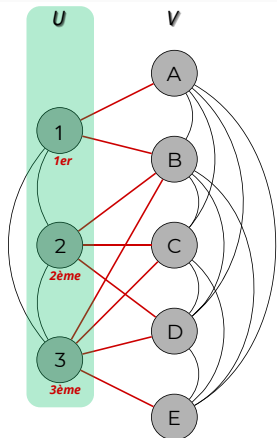
→  $\tilde{G}$  trop dense : utiliser les **voisinages bipartis** ;

→ Initialiser la recherche sur **les sommets de U** ;

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bron-Kerbosch sur le graphe étendu $\tilde{G}$

#### Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch



→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

#### BBK : tirer parti de la bipartition

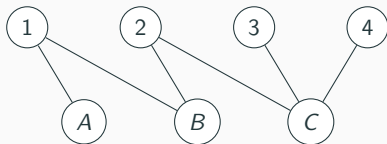
- $\tilde{G}$  trop dense : utiliser les **voisinages bipartis** ;
- Initialiser la recherche sur **les sommets de U** ;
- **Ordre par bidégénérescence** des sommets de U.

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bidégénérescence

**Voisinage projeté de  $u \in U$**

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$

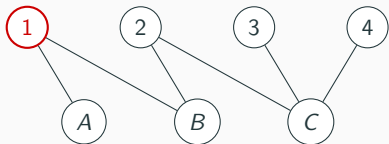


## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bidégénérescence

**Voisinage projeté de  $u \in U$**

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$



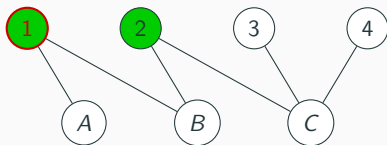


## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bidégénérescence

**Voisinage projeté de  $u \in U$**

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$

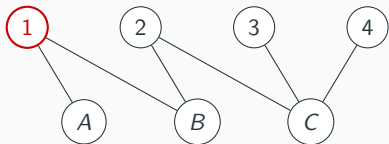


## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bidégénérescence

**Voisinage projeté de  $u \in U$**

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$

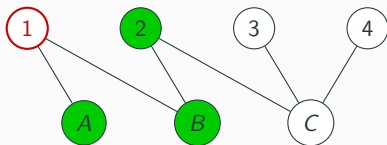


## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bidégénérescence

Voisinage projeté de  $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$



### Ordre par bidégénérescence – procédure de construction

Si  $u_1, \dots, u_i$  déjà traités, choisir  $u_{i+1}$  qui minimise la taille de l'ensemble des candidats :

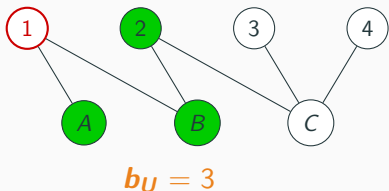
$$Cand(u) = N(u) \cup N_2(u) \setminus \{u\} \setminus \{u_1, \dots, u_i\}.$$

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Bidégénérescence

Voisinage projeté de  $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$



Ordre par bidégénérescence – procédure de construction

Si  $u_1, \dots, u_i$  déjà traités, choisir  $u_{i+1}$  qui minimise la taille de l'ensemble des candidats :

$$Cand(u) = N(u) \cup N_2(u) \setminus \{u\} \setminus \{u_1, \dots, u_i\}.$$

$b_U =$  bidégénérescence de  $U$  : taille max. d'un ensemble de candidats.

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Complexités

#### Complexité en fonction de l'entrée

L'algorithme BBK s'exécute en  $\mathcal{O}(n_U \cdot b_U \cdot 3^{b_U/3})$ .

où :  $n_U$  : nombre de sommets de  $U$  ;

$b_U$  : bidégénérescence.

## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Complexités

#### Complexité en fonction de l'entrée

L'algorithme BBK s'exécute en  $\mathcal{O}(n_U \cdot b_U \cdot 3^{b_U/3})$ .

où :  $n_U$  : nombre de sommets de  $U$  ;  
 $b_U$  : bidégénérescence.

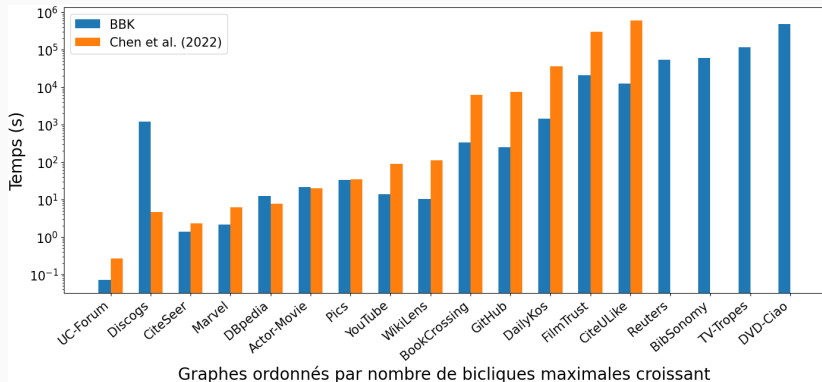
#### Complexité en fonction de la sortie

L'algorithme BBK s'exécute en  $\mathcal{O}(\frac{1}{r} \cdot b_U^2 \cdot q \cdot \mathcal{B})$ .

où :  $\mathcal{B}$  : nombre de bicliques maximales ;  
 $q$  : taille maximale d'une biclique ;  
 $1 \leq \frac{1}{r} \leq 2^q$ , mais  $\frac{1}{r} \simeq 1$  en pratique.

## 2 - Énumération des bicliques maximales

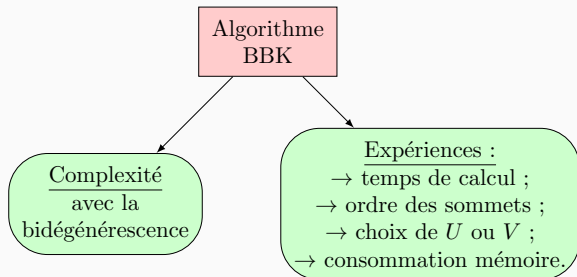
### > Expériences



## 2 - Énumération des bicliques maximales

### > Conclusion

Passage à l'échelle de l'énumération des bicliques maximales aux graphes bipartis massifs issus du monde réel.



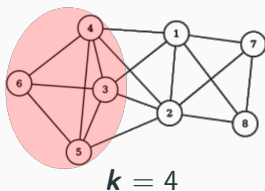


## **3 - Percolation de cliques dans les flots de liens**

---

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)

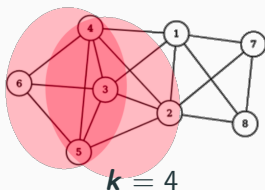


**$k$ -clique**

Clique à  $k$  sommets.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



**$k$ -clique**

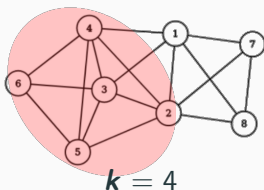
Clique à  $k$  sommets.

**Règle de regroupement**

Deux  $k$ -cliques sont adjacentes si elles partagent  $k - 1$  sommets.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



**$k$ -clique**

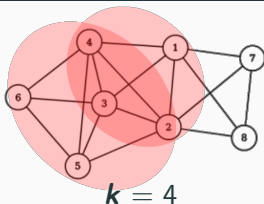
Clique à  $k$  sommets.

**Règle de regroupement**

Deux  $k$ -cliques sont adjacentes si elles partagent  $k - 1$  sommets.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



**$k$ -clique**

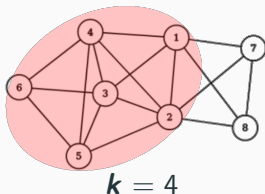
Clique à  $k$  sommets.

**Règle de regroupement**

Deux  $k$ -cliques sont adjacentes si elles partagent  $k - 1$  sommets.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



**$k$ -clique**

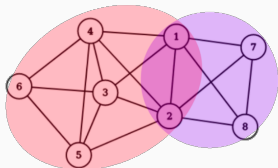
Clique à  $k$  sommets.

**Règle de regroupement**

Deux  $k$ -cliques sont adjacentes si elles partagent  $k - 1$  sommets.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



$$k = 4$$

**$k$ -clique**

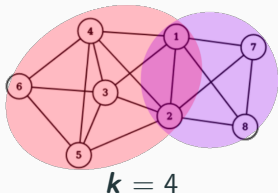
Clique à  $k$  sommets.

**Règle de regroupement**

Deux  $k$ -cliques sont adjacentes si elles partagent  $k - 1$  sommets.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



**$k$ -clique**

Clique à  $k$  sommets.

#### **Règle de regroupement**

Deux  $k$ -cliques sont adjacentes si elles partagent  $k - 1$  sommets.

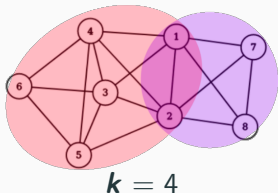
#### **Avantages de cette définition de communautés :**

- Définition locale
- Déterministe
- Les communautés peuvent se chevaucher



### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



**$k$ -clique**

Clique à  $k$  sommets.

#### Règle de regroupement

Deux  $k$ -cliques sont adjacentes si elles partagent  $k - 1$  sommets.

#### Avantages de cette définition de communautés :

- Définition locale
- Déterministe
- Les communautés peuvent se chevaucher



**Comment étendre CPM aux réseaux temporels ?**

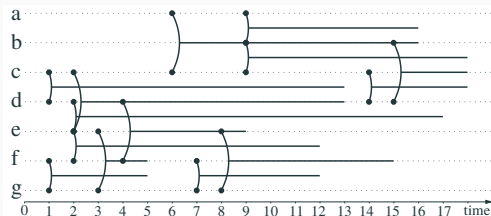
### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec  $k = 3$  :



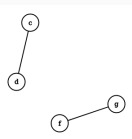
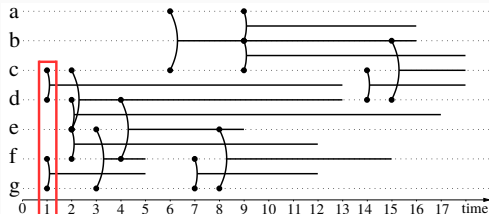
### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec  $k = 3$  :



$t = 1$

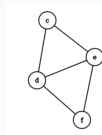
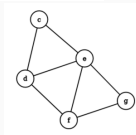
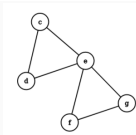
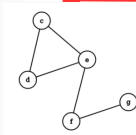
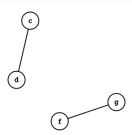
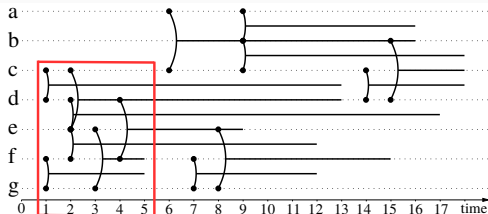
### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec  $k = 3$  :



$t = 1$

→

$t = 2$

→

$t = 3$

→

$t = 4$

→

$t = 5$

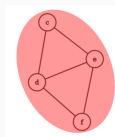
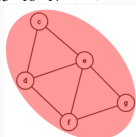
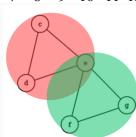
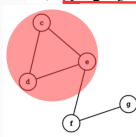
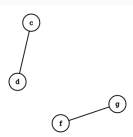
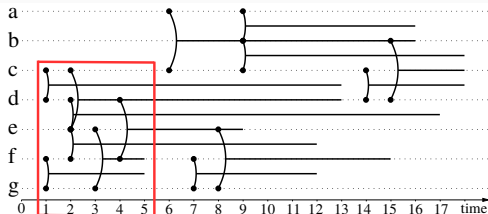
### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec  $k = 3$  :



$t = 1$

→

$t = 2$

→

$t = 3$

→

$t = 4$

→

$t = 5$

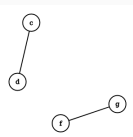
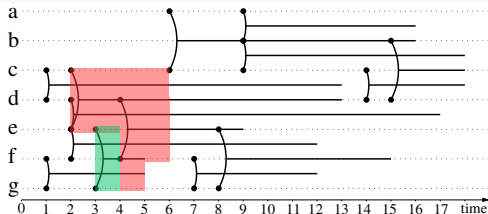
### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

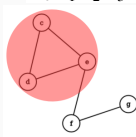
CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

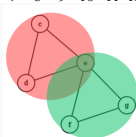
Exemple avec  $k = 3$  :



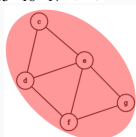
$t = 1$



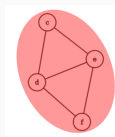
$t = 2$



$t = 3$



$t = 4$



$t = 5$

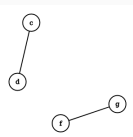
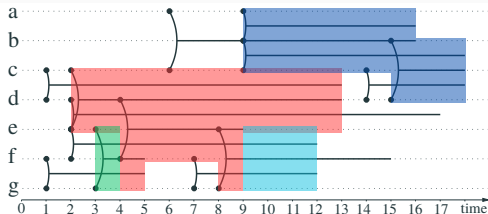
### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

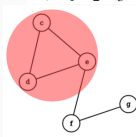
CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

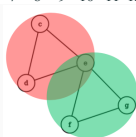
Exemple avec  $k = 3$  :



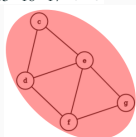
$t = 1$



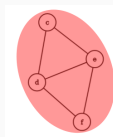
$t = 2$



$t = 3$



$t = 4$

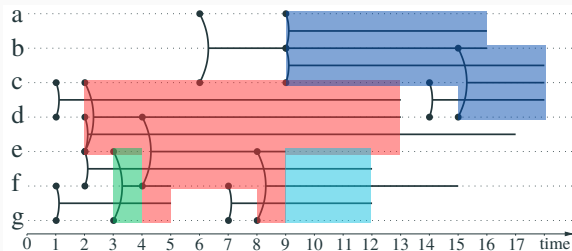


$t = 5$

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

#### Dynamic CPM (DCPM) :



#### Limites de l'algorithme DCPM :

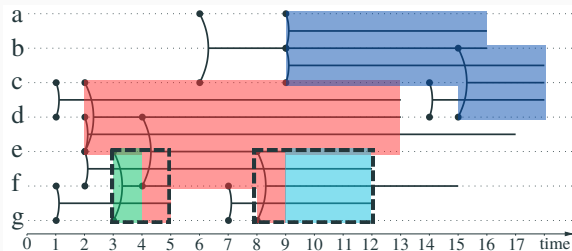
- Calcule les communautés à chaque pas de temps : **coûteux** ;
- Des données temporelles **qu'on attendrait groupées** ne le sont pas.



### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Première extension de CPM aux graphes temporels

#### Dynamic CPM (DCPM) :

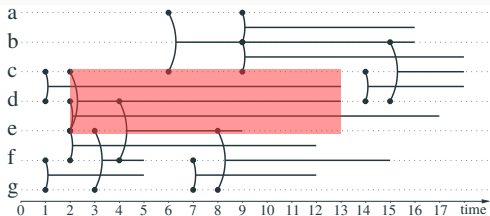


#### Limites de l'algorithme DCPM :

- Calcule les communautés à chaque pas de temps : **coûteux** ;
- Des données temporelles **qu'on attendrait groupées** ne le sont pas.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



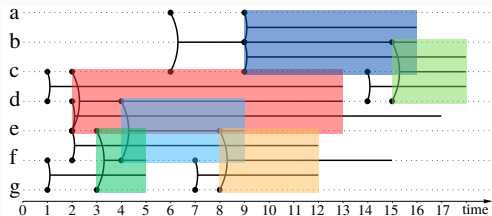
*Exemple avec  $k = 3$ .*

**$k$ -clique dans un flot de liens**

Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



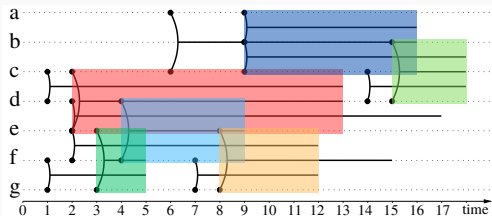
*Exemple avec  $k = 3$ .*

**$k$ -clique dans un flot de liens**

Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



*Exemple avec  $k = 3$ .*

**$k$ -clique dans un flot de liens**

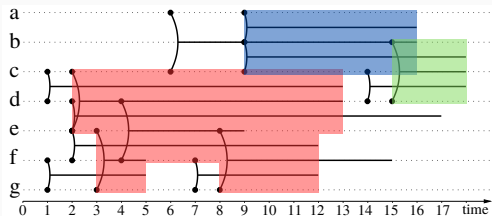
Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

#### Règle de regroupement

$k$ -cliques adjacentes :  $k - 1$  sommets communs sur une durée  $> 0$ .

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



*Exemple avec  $k = 3$ .*

**$k$ -clique dans un flot de liens**

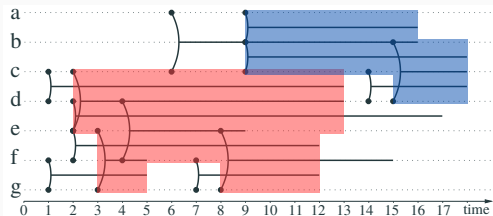
Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

#### Règle de regroupement

$k$ -cliques adjacentes :  $k - 1$  sommets communs sur une durée  $> 0$ .

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



*Exemple avec  $k = 3$ .*

**$k$ -clique dans un flot de liens**

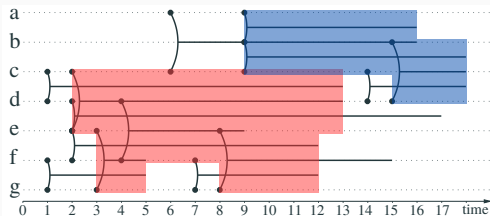
Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

#### Règle de regroupement

$k$ -cliques adjacentes :  $k - 1$  sommets communs sur une durée  $> 0$ .

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec  $k = 3$ .

**$k$ -clique dans un flot de liens**

Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

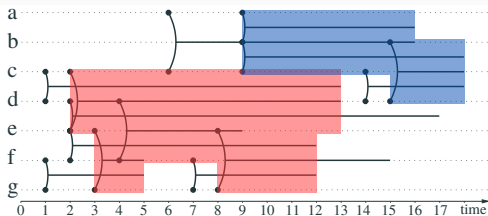
#### Règle de regroupement

$k$ -cliques adjacentes :  $k - 1$  sommets communs sur une durée  $> 0$ .

⇒ Nouvelle structure, Temporal Union-Find :  
fusion des communautés sous forme  
d'ensembles disjoints de  $(k - 1)$ -cliques temporelles.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec  $k = 3$ .

**$k$ -clique dans un flot de liens**

Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

#### Règle de regroupement

$k$ -cliques adjacentes :  $k - 1$  sommets communs sur une durée  $> 0$ .

⇒ Nouvelle structure, Temporal Union-Find :

fusion des communautés sous forme

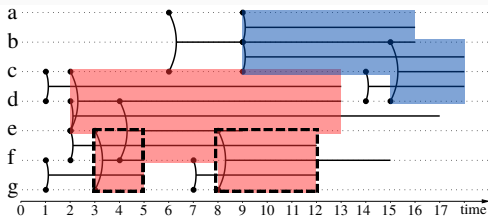
d'ensembles disjoints de  $(k - 1)$ -cliques temporelles.

Les communautés LSCPM sont des **unions** de communautés DCPM



### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec  $k = 3$ .

**$k$ -clique dans un flot de liens**

Clique à  $k$  sommets, maximale en temps.

#### Règle de regroupement

$k$ -cliques adjacentes :  $k - 1$  sommets communs sur une durée  $> 0$ .

⇒ Nouvelle structure, Temporal Union-Find :

fusion des communautés sous forme

d'ensembles disjoints de  $(k - 1)$ -cliques temporelles.

Les communautés LSCPM sont des **unions** de communautés DCPM

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

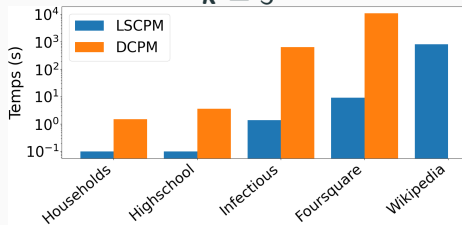
#### > Expériences sur flots de liens du monde réel

#### Jeux de données

Flot de liens	# liens
<i>Households</i>	2,136
<i>Highschool</i>	5,528
<i>Infectious</i>	44,658
<i>Foursquare</i>	268,472
<i>Wikipedia</i>	39,953,380

#### Temps de calcul

$k = 3$



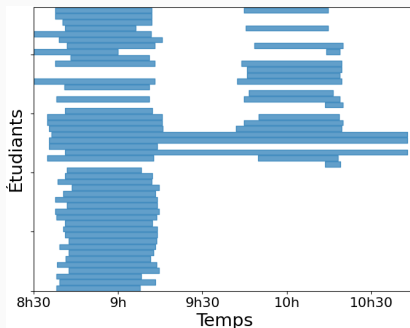
### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Exemple d'une communauté LSCPM

#### Jeux de données "Highschool" (SocioPatterns)

- 5 classes préparatoires, Marseille ;
- une semaine d'enregistrement de contacts des étudiants.

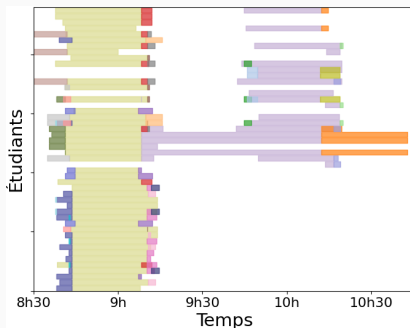
#### Une communauté LSCPM de Highschool :



### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM communities are union of DCPM communities

Une communauté LSCPM de Highschool :



*Couleurs = communautés DCPM.*

→ Agrège plus les communautés temporelles.

### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

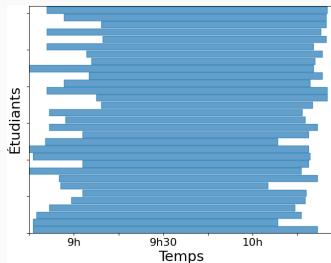
#### > Taux de dynamicité

#### Taux de dynamicité

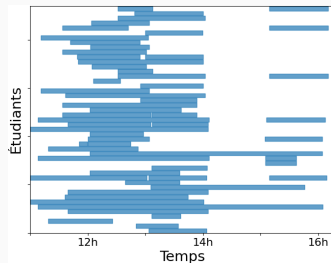
Si  $C$  est une communauté temporelle :

$$t_d(C) = 1 - \frac{\text{durée moyenne des sommets dans } C}{\text{durée de } C}$$

*Faible dynamicité (0,16)*



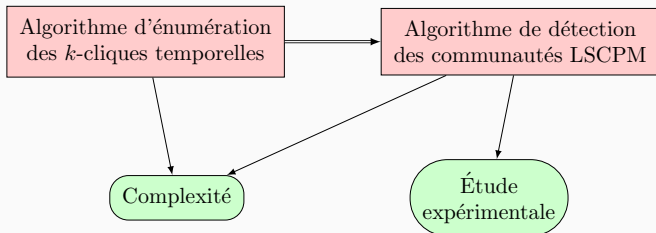
*Forte dynamicité (0,64)*



### 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

#### > Conclusion

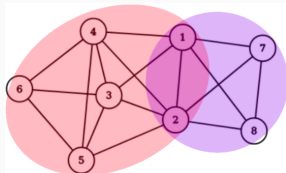
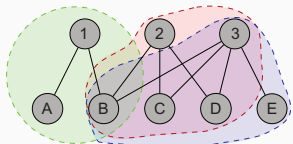
#### Extension de CPM aux flots de liens



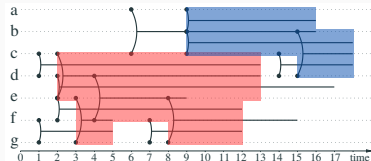
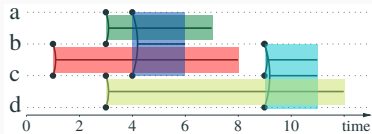
## **4 - Conclusion et perspectives**

---

# 4 - Conclusion et perspectives

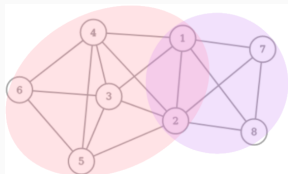
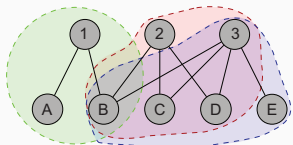


	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>

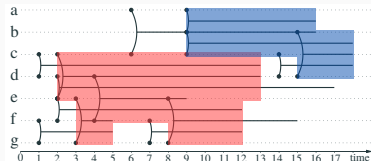
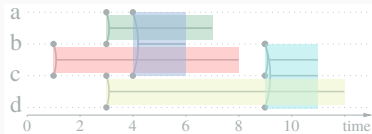




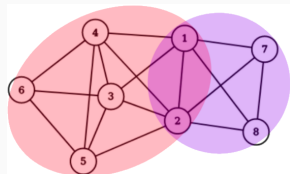
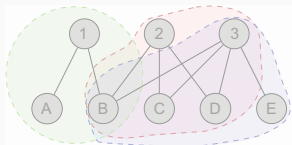
## 4 - Conclusion et perspectives



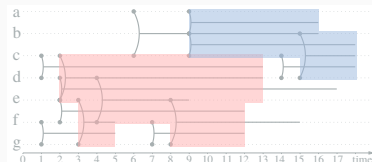
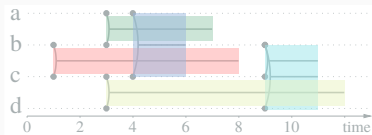
	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>



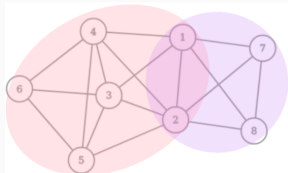
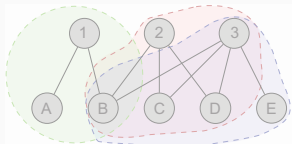
# 4 - Conclusion et perspectives



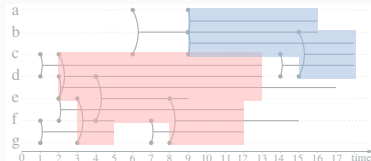
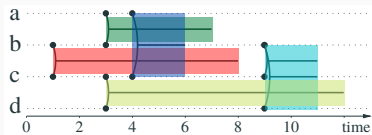
	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>



## 4 - Conclusion et perspectives



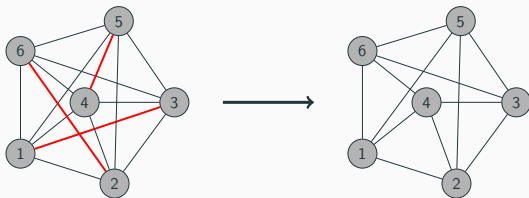
	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>



## 4 - Conclusion et perspectives

### Perspectives

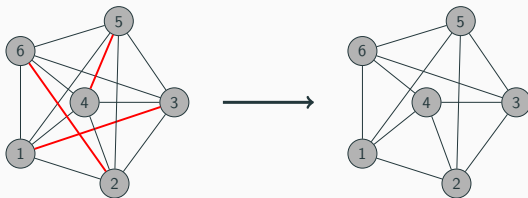
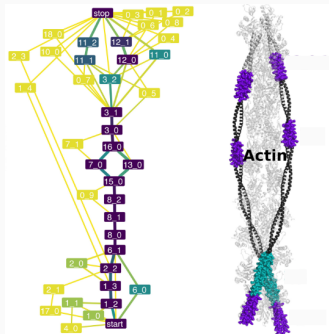
Relaxer la définition  
de clique.



## 4 - Conclusion et perspectives

### Perspectives

Relaxer la définition  
de clique.



Ouverture  
interdisciplinaire [Zea+21].

# Cliques statiques et temporelles : algorithmes d'énumération et de détection de communautés

---

Alexis BAUDIN

14 décembre 2023

Soutenance de thèse

Thèse encadrée par Clémence MAGNIEN et Lionel TABOURIER

