

Cliques statiques et temporelles : algorithmes d'énumération et de détection de communautés

Alexis BAUDIN

14 décembre 2023

Soutenance de thèse

Thèse encadrée par Clémence MAGNIEN et Lionel TABOURIER

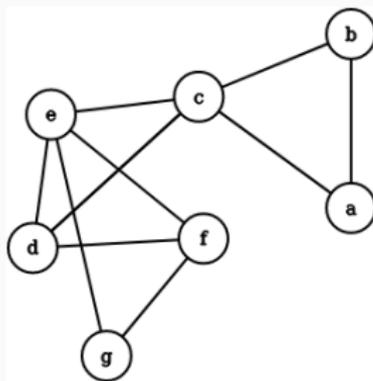


- 1 - Contexte de la thèse et définitions
- 2 - Énumération des bicliques maximales
- 3 - Percolation de cliques dans les flots de liens
- 4 - Conclusion et perspectives

1 - Contexte de la thèse et définitions

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Les graphes

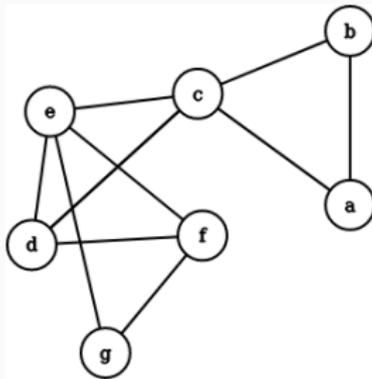


Graphe

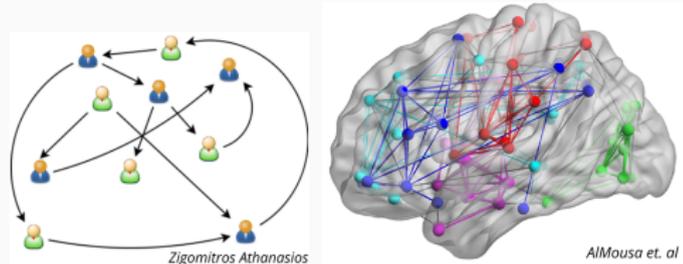
- Sommets : a, b, \dots, g
- Interactions : arêtes
 $\{a, b\}, \{a, c\}, \dots$

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Les graphes



Exemples



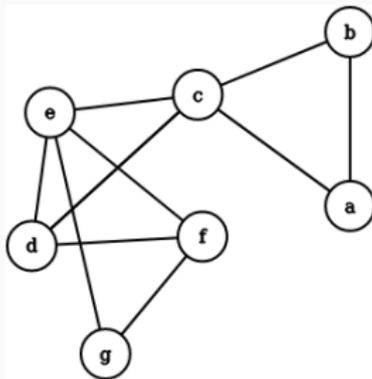
Graphe

- Sommets : a, b, \dots, g
- Interactions : arêtes $\{a, b\}, \{a, c\}, \dots$

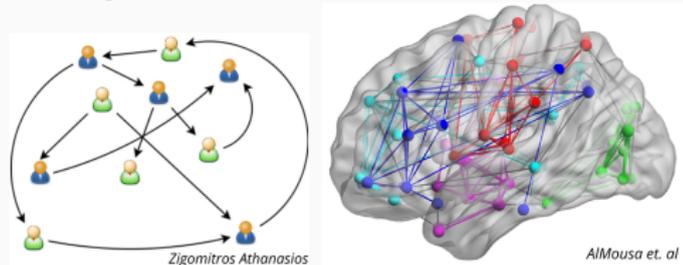


1 - Contexte de la thèse et définitions

> Les graphes



Exemples



Graphe

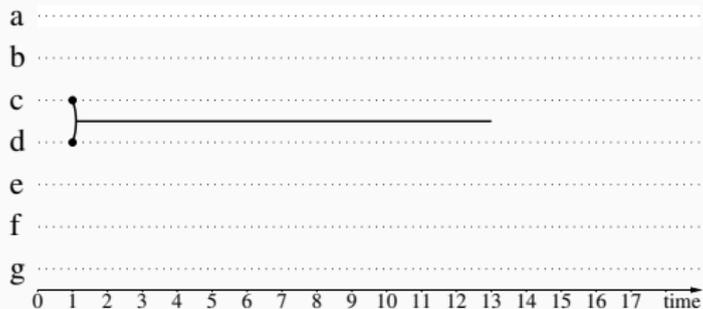
- Sommets : a, b, \dots, g
- Interactions : arêtes $\{a, b\}, \{a, c\}, \dots$



⇒ Interactions statiques

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Interactions temporelles : les flots de liens

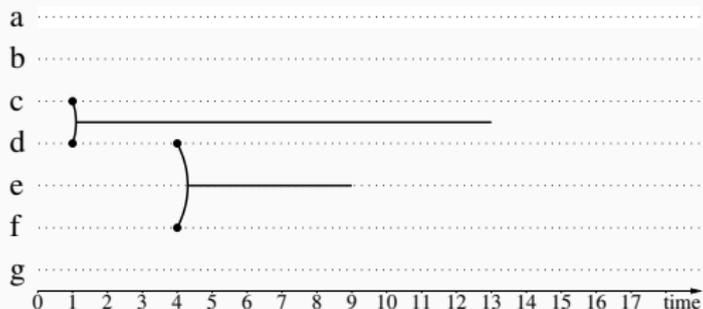


Flot de liens

- Sommets : a, b, \dots, g
- Temps : $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
 - c, d lien sur $[1, 13]$

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Interactions temporelles : les flots de liens

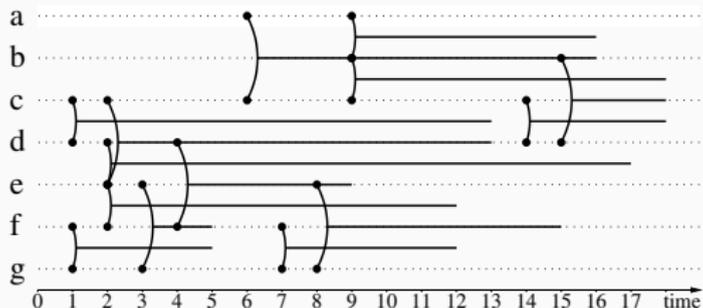


Flot de liens

- Sommets : a, b, \dots, g
- Temps : $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
 - c, d lien sur $[1, 13]$
 - d, f lien sur $[4, 9]$

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Interactions temporelles : les flots de liens

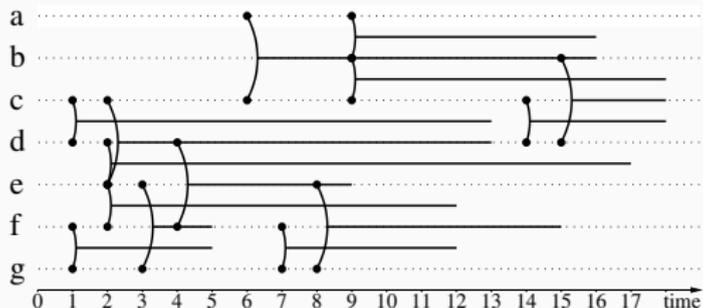


Flot de liens

- Sommets : a, b, \dots, g
- Temps : $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
 - c, d lien sur $[1, 13]$
 - d, f lien sur $[4, 9]$
 - ...

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Interactions temporelles : les flots de liens



Flot de liens

- Sommets : a, b, \dots, g
- Temps : $[0, 18]$
- Arêtes temporelles :
 - c, d lien sur $[1, 13]$
 - d, f lien sur $[4, 9]$
 - ...

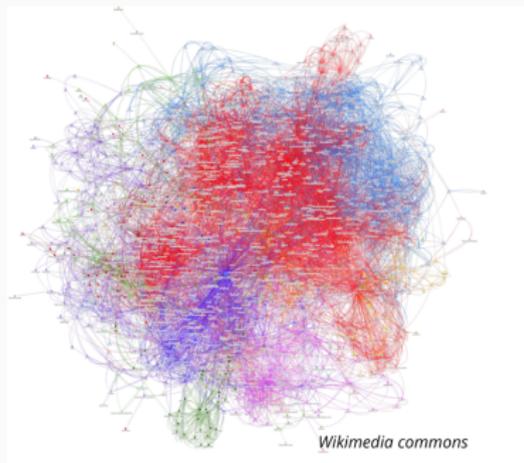
Avantages

- traiter directement le flux des interactions
- pas de choix arbitraire d'une échelle de temps
- le temps peut être continu

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Graphes massifs issus du monde réel

De plus en plus de données



→ 10^6 articles Wikipedia francophone

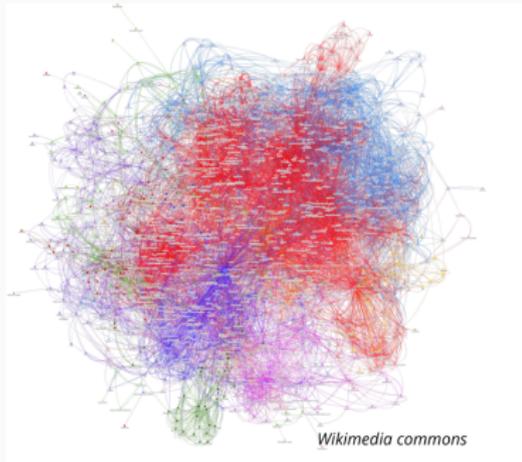
→ 10^9 utilisateurs Facebook

→ 10^{11} neurones humains

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Graphes massifs issus du monde réel

De plus en plus de données



- 10^6 articles Wikipedia francophone
- 10^9 utilisateurs Facebook
- 10^{11} neurones humains

Graphe réel \neq graphe tiré aléatoirement

- peu denses ;
- degrés hétérogènes ;
- densité locale ;
- ...

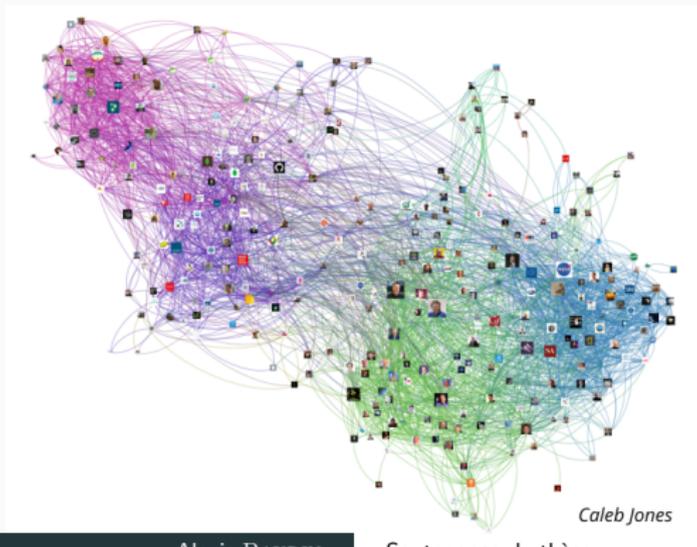


1 - Contexte de la thèse et définitions

> Étude des communautés

Étudier les sous-graphes denses :

- Cibler les zones à forte densité d'interactions
- Comprendre la structure d'organisation des interactions
- Zoomer en avant et en arrière sur les données

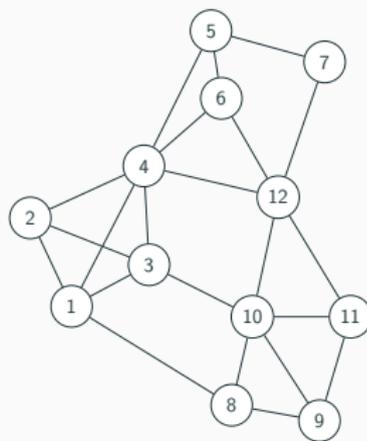


1 - Contexte de la thèse et définitions

> Étude des communautés

Communautés : ensembles de sommets

- Densément connectés à l'intérieur
- Peu connectés au reste du graphe

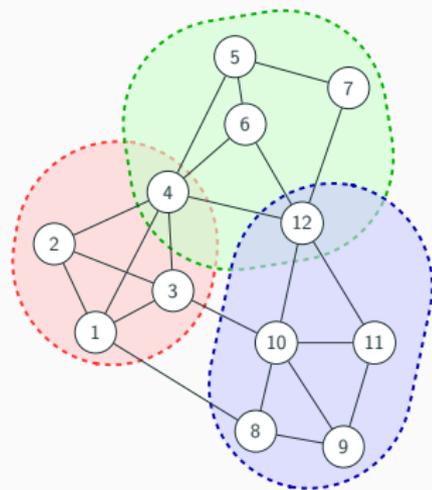


1 - Contexte de la thèse et définitions

> Étude des communautés

Communautés : ensembles de sommets

- Densément connectés à l'intérieur
- Peu connectés au reste du graphe

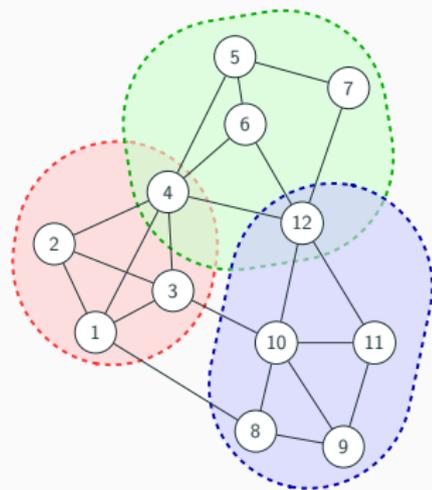
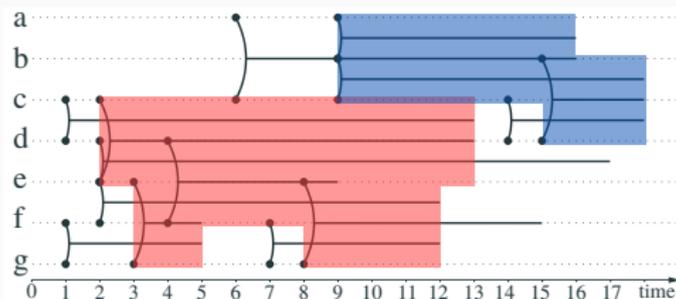


1 - Contexte de la thèse et définitions

> Étude des communautés

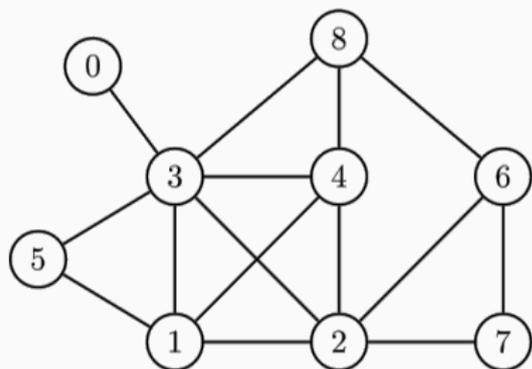
Communautés : ensembles de sommets / sommets temporels

- Densément connectés à l'intérieur
- Peu connectés au reste du graphe / du flot



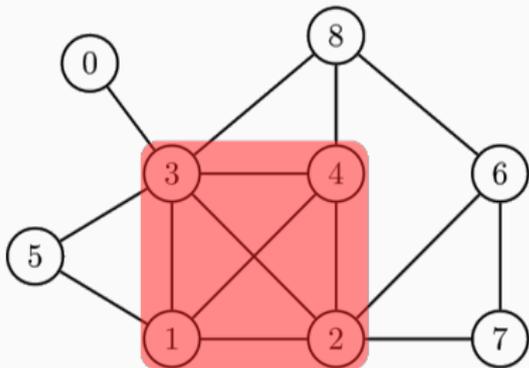
1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques



1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques



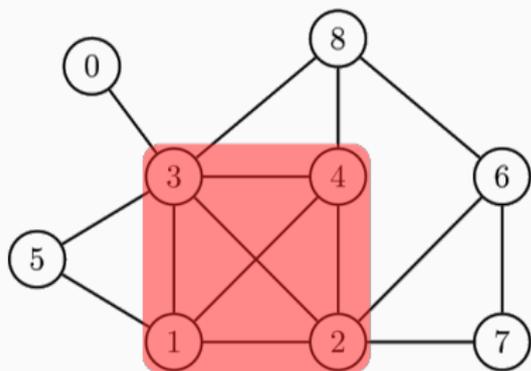
- $\{1, 2, 3, 4\}$ clique

Clique d'un graphe

Ensemble de sommets tous connectés entre eux.

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques



- $\{1, 2, 3, 4\}$ clique **maximale**
- $\{1, 2, 3\}$ clique **non maximale**

Clique d'un graphe

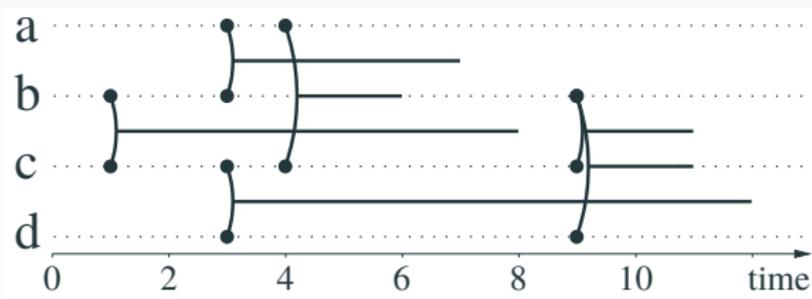
Ensemble de sommets tous connectés entre eux.

Clique maximale

Incluse dans aucune autre clique.

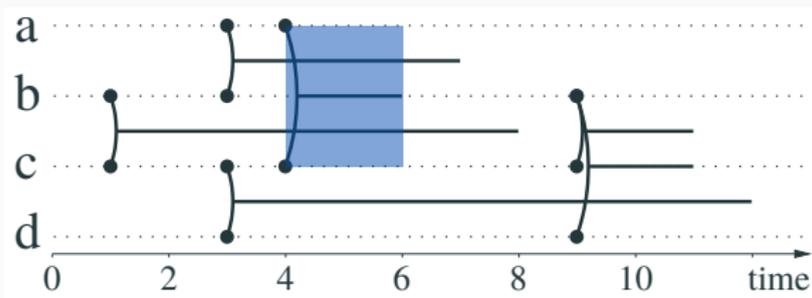
1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques



1 - Contexte de la thèse et définitions

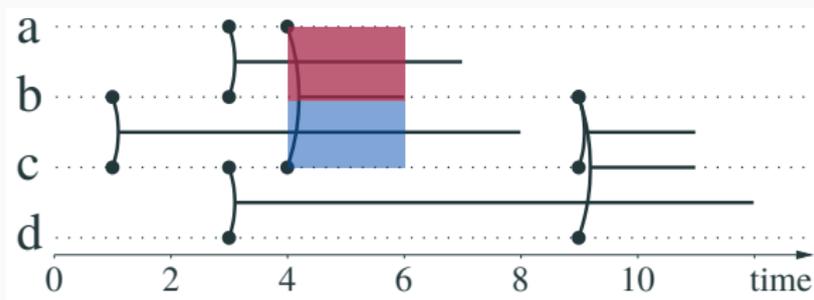
> Énumération des cliques



$(\{a, b, c\}, [4, 6])$ est une clique

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques

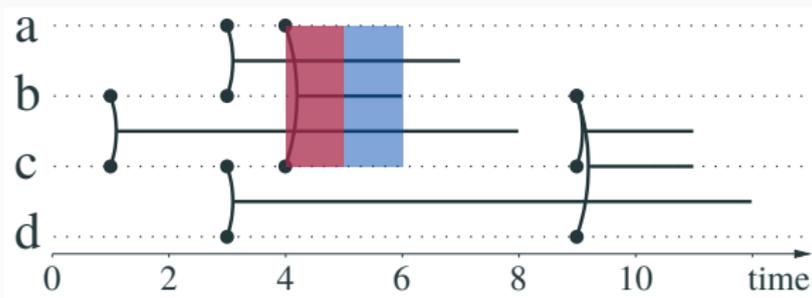


$(\{a, b, c\}, [4, 6])$ est une clique

→ $(\{a, b\}, [4, 6])$ n'est pas maximale en sommets

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques



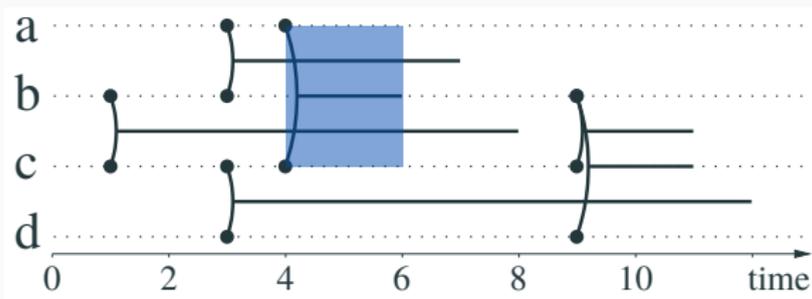
$(\{a, b, c\}, [4, 6])$ est une clique

→ $(\{a, b\}, [4, 6])$ n'est pas maximale en sommets

→ $(\{a, b, c\}, [4, 5])$ n'est pas maximale en temps

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques



$(\{a, b, c\}, [4, 6])$ est une clique

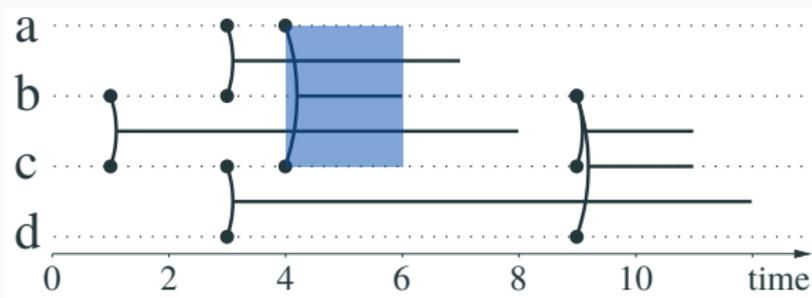
→ $(\{a, b\}, [4, 6])$ n'est pas maximale en sommets

→ $(\{a, b, c\}, [4, 5])$ n'est pas maximale en temps

maximale = *en sommets et en temps*

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Énumération des cliques



$(\{a, b, c\}, [4, 6])$ est une clique maximale.

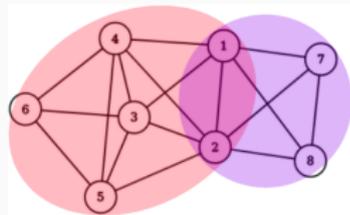
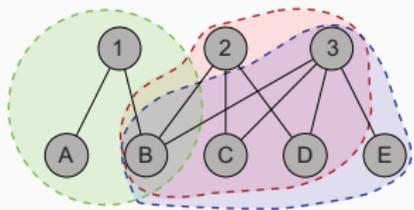
→ $(\{a, b\}, [4, 6])$ n'est pas maximale en sommets

→ $(\{a, b, c\}, [4, 5])$ n'est pas maximale en temps

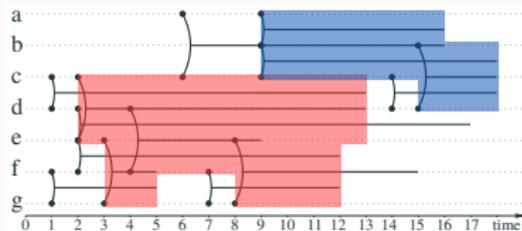
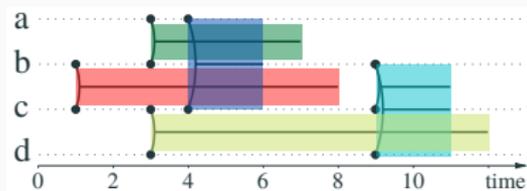
maximale = en sommets et en temps

1 - Contexte de la thèse et définitions

> Contributions algorithmiques

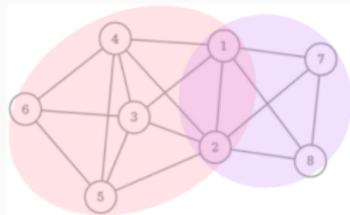
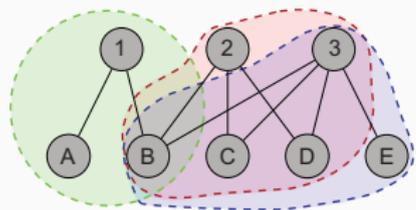


	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales</i> <i>graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales</i> <i>flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>flots de liens [BTM23]</i>

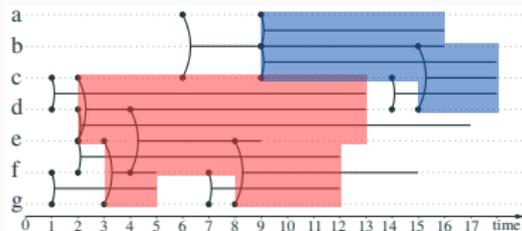


1 - Contexte de la thèse et définitions

> Contributions algorithmiques

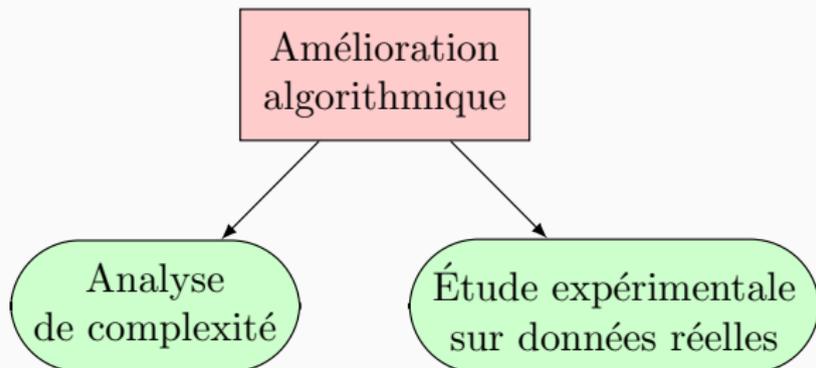


	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales</i> <i>graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales</i> <i>flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques</i> <i>flots de liens [BTM23]</i>



Pour chaque contribution :

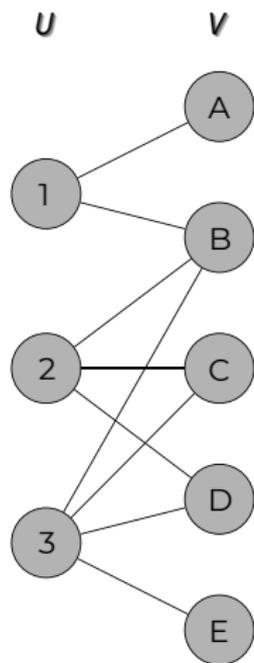
passage à l'échelle de réseaux massifs issus du monde réel.



2 - Énumération des bicliques maximales

2 - Énumération des bicliques maximales

> Graphes bipartis et bicliques

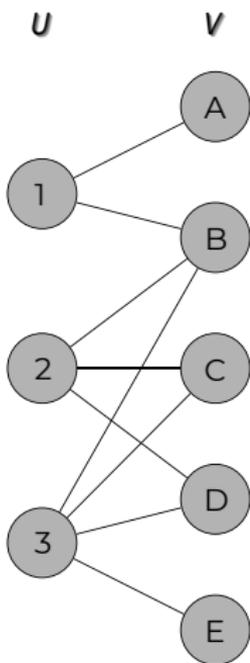


Graphe biparti $G = (U, V, E)$

- U et V : ensembles de sommets disjoints ;
- E : interactions entre U et V ;

2 - Énumération des bicliques maximales

> Graphes bipartis et bicliques



Graphe biparti $G = (U, V, E)$

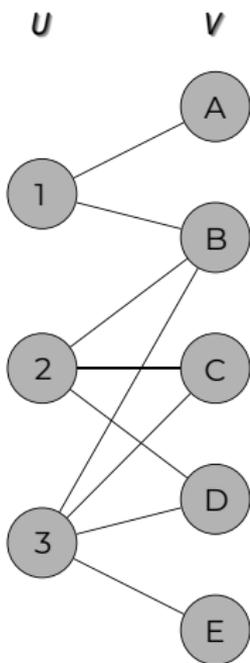
- U et V : ensembles de sommets disjoints ;
- E : interactions entre U et V ;

Modélise interactions du monde réel

- Plateformes en ligne ;
- Publications scientifiques ;
- ...

2 - Énumération des bicliques maximales

> Graphes bipartis et bicliques



Grphe biparti $G = (U, V, E)$

- U et V : ensembles de sommets disjoints ;
- E : interactions entre U et V ;

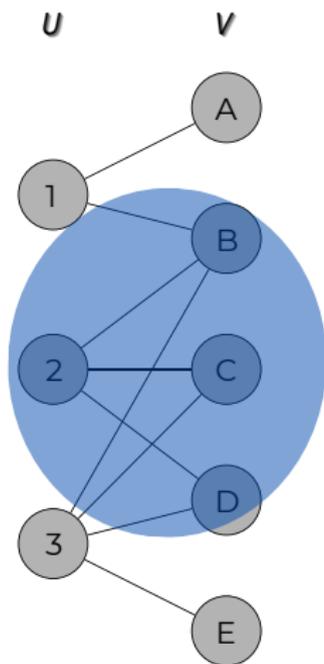
Modélise interactions du monde réel

- Plateformes en ligne ;
- Publications scientifiques ;
- ...

Équivalent aux hypergraphes

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bicliques d'un graphe biparti



Biclique

$C_U \cup C_V$ avec $C_U \subseteq U$, $C_V \subseteq V$.

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$, u et v connectés.

Biclique maximale

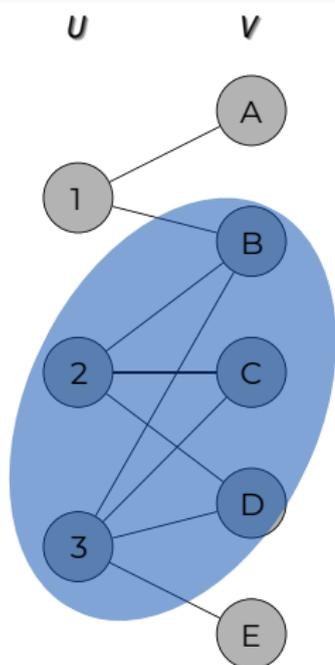
Incluse dans aucune autre.

Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$ non maximale

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bicliques d'un graphe biparti



Biclique

$C_U \cup C_V$ avec $C_U \subseteq U$, $C_V \subseteq V$.

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$, u et v connectés.

Biclique maximale

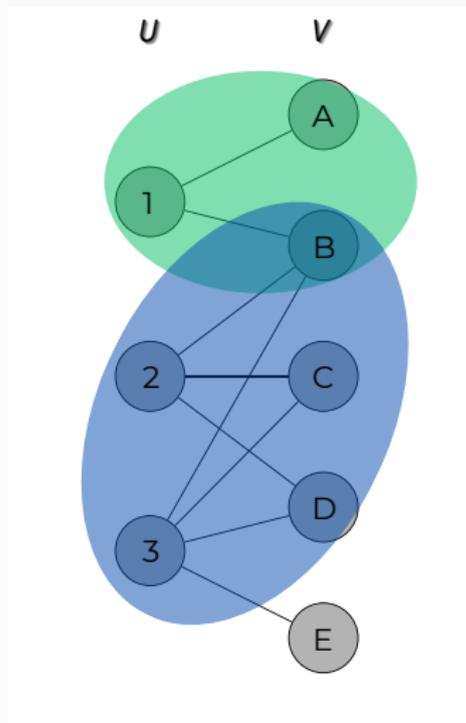
Incluse dans aucune autre.

Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$ non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$ maximale

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bicliques d'un graphe biparti



Biclique

$C_U \cup C_V$ avec $C_U \subseteq U$, $C_V \subseteq V$.

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$, u et v connectés.

Biclique maximale

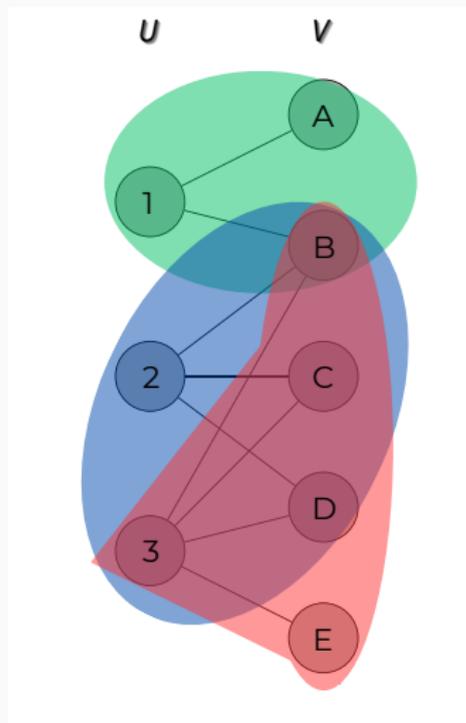
Incluse dans aucune autre.

Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$ non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$ maximale
- $\{1, A, B\}$ maximale

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bicliques d'un graphe biparti



Biclique

$C_U \cup C_V$ avec $C_U \subseteq U$, $C_V \subseteq V$.

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$, u et v connectés.

Biclique maximale

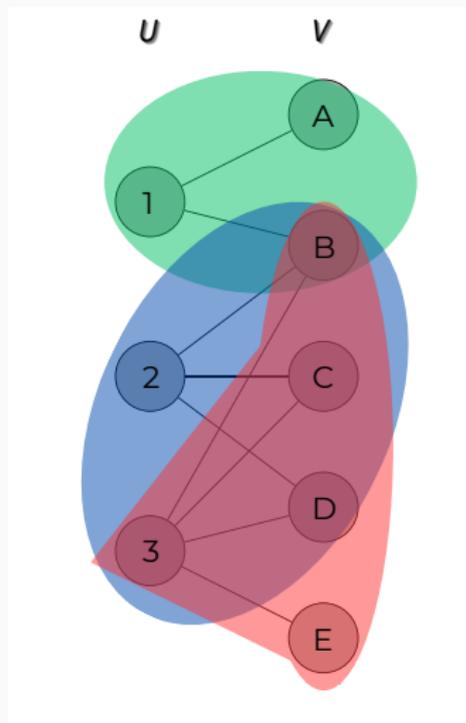
Incluse dans aucune autre.

Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$ non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$ maximale
- $\{1, A, B\}$ maximale
- $\{3, B, C, D, E\}$ maximale

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bicliques d'un graphe biparti



Biclique

$C_U \cup C_V$ avec $C_U \subseteq U$, $C_V \subseteq V$.

$\forall u \in C_U \forall v \in C_V$, u et v connectés.

Biclique maximale

Incluse dans aucune autre.

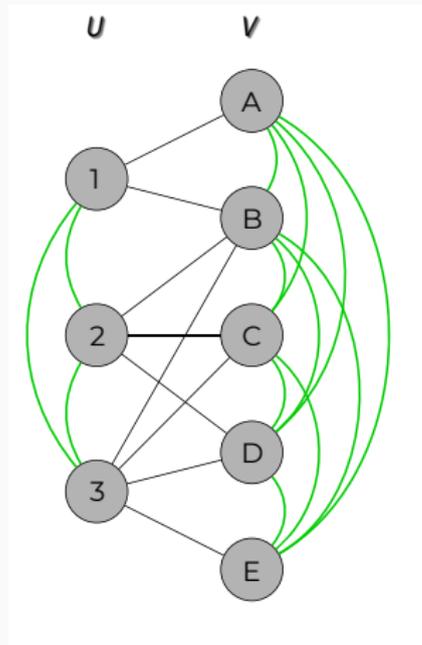
Exemples :

- $\{2, B, C, D\}$ non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$ maximale
- $\{1, A, B\}$ maximale
- $\{3, B, C, D, E\}$ maximale

⇒ **Contribution** : énumération dans les graphes massifs réels.

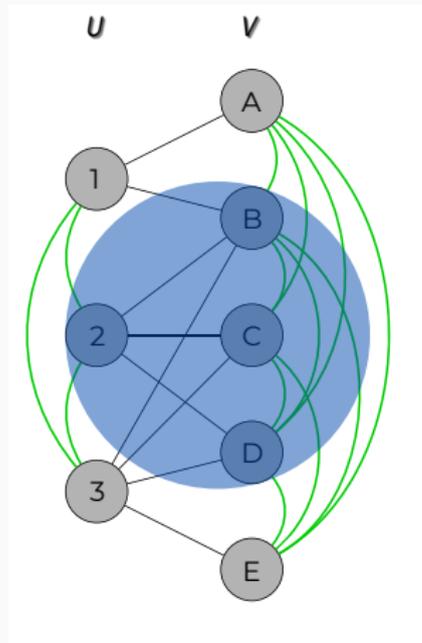
2 - Énumération des bicliques maximales

> \tilde{G} : graphe étendu d'un graphe biparti



2 - Énumération des bicliques maximales

> \tilde{G} : graphe étendu d'un graphe biparti



Théorème

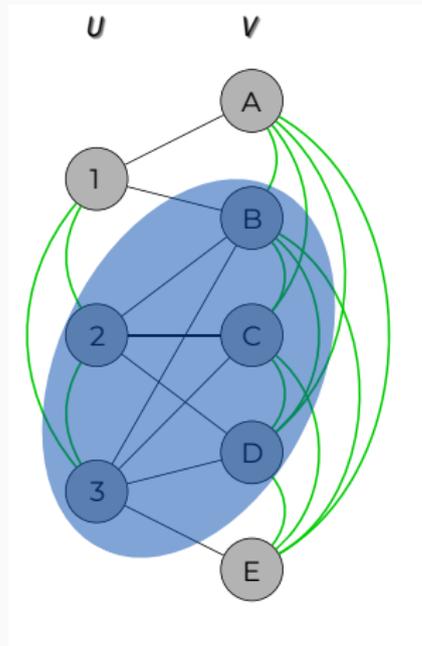
- Les cliques de \tilde{G} sont les bicliques de G ;
- Les cliques **maximales** de \tilde{G} sont les bicliques **maximales** de G .

Exemple

- $\{2, B, C, D\}$ clique/biclique non maximale

2 - Énumération des bicliques maximales

> \tilde{G} : graphe étendu d'un graphe biparti



Théorème

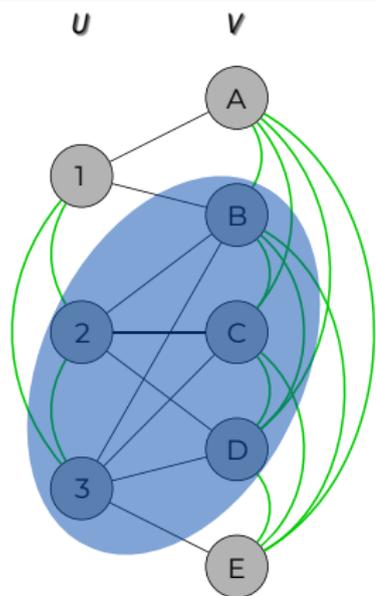
- Les cliques de \tilde{G} sont les bicliques de G ;
- Les cliques **maximales** de \tilde{G} sont les bicliques **maximales** de G .

Exemple

- $\{2, B, C, D\}$ clique/biclique non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$ clique/biclique maximale

2 - Énumération des bicliques maximales

> \tilde{G} : graphe étendu d'un graphe biparti



⇒ **Algorithme :**
énumérer les cliques
maximales de \tilde{G}

Théorème

- Les cliques de \tilde{G} sont les bicliques de G ;
- Les cliques **maximales** de \tilde{G} sont les bicliques **maximales** de G .

Exemple

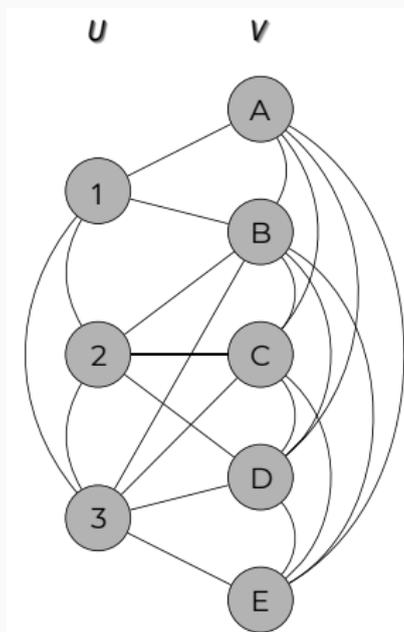
- $\{2, B, C, D\}$ clique/biclique non maximale
- $\{2, 3, B, C, D\}$ clique/biclique maximale

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

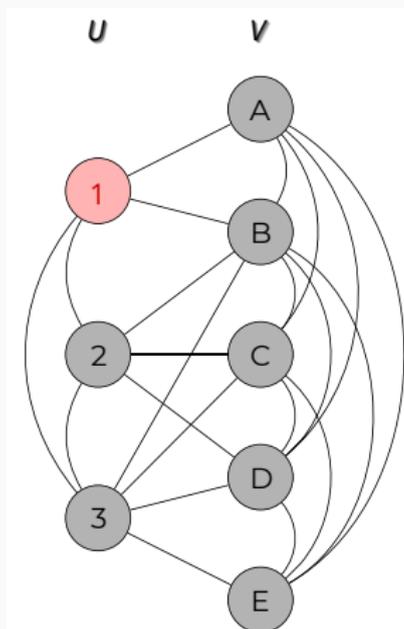


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

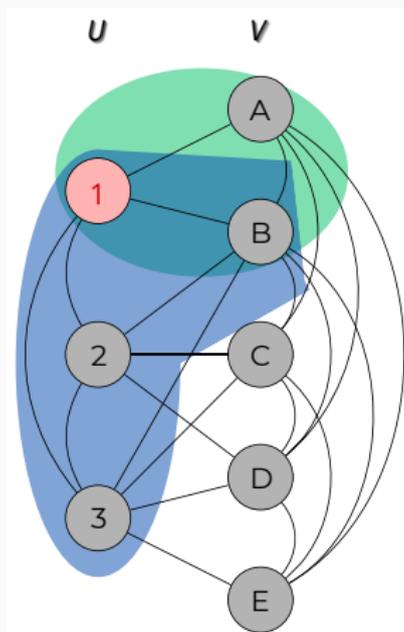


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

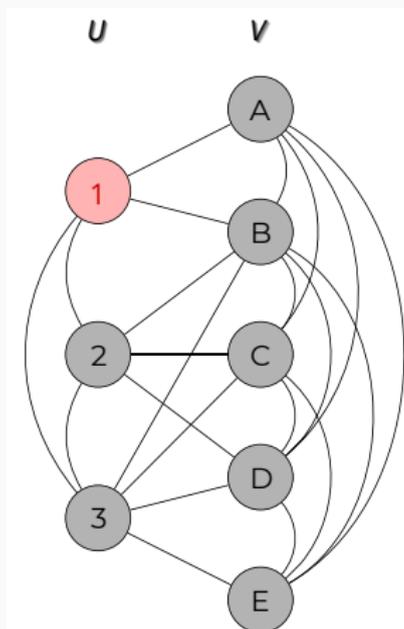


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

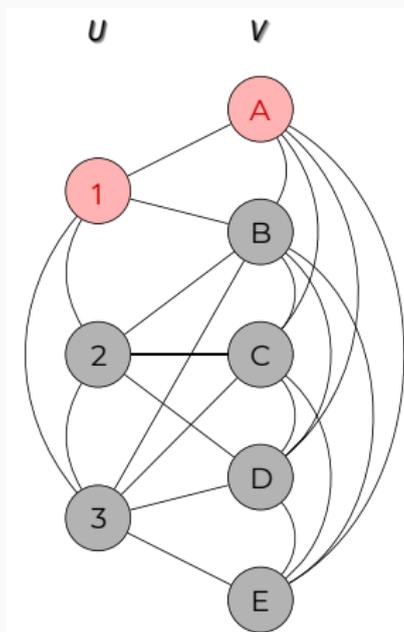


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

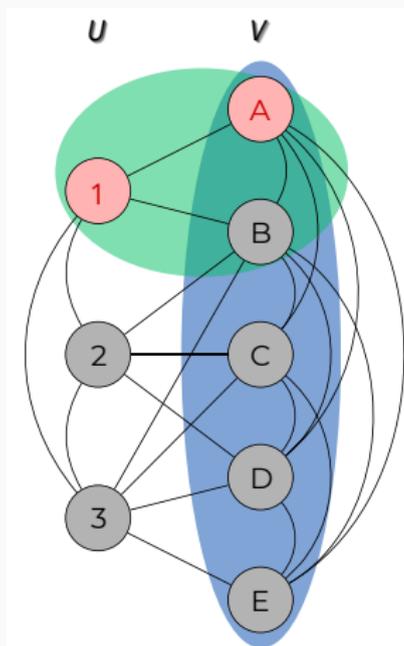


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

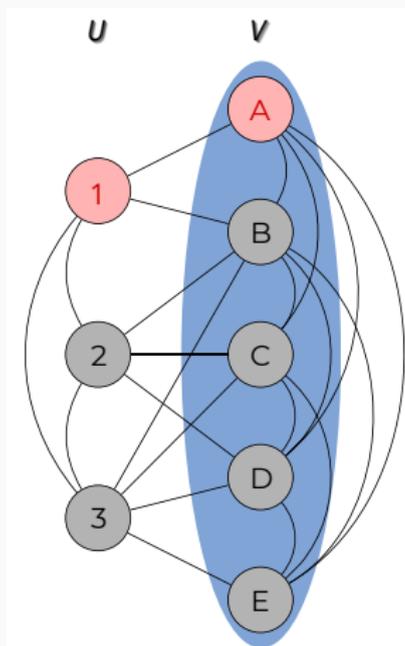


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

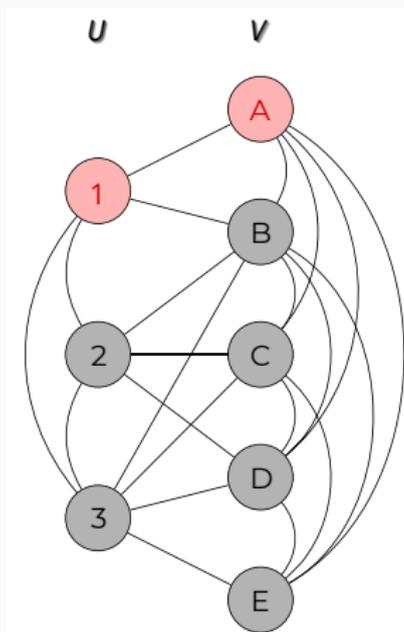


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

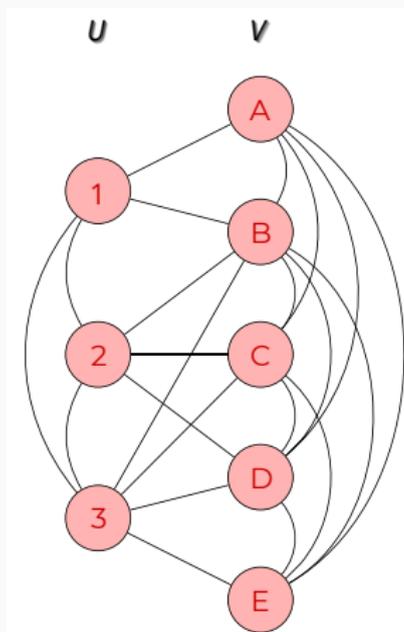


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

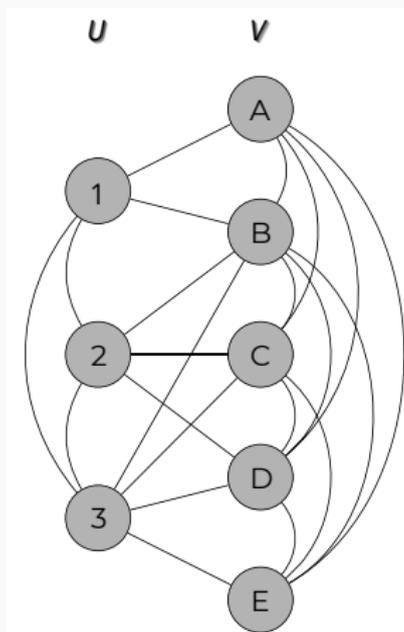


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch

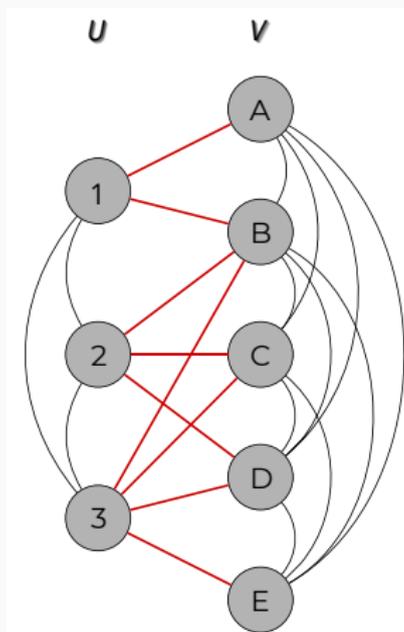
→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).



2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch



→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

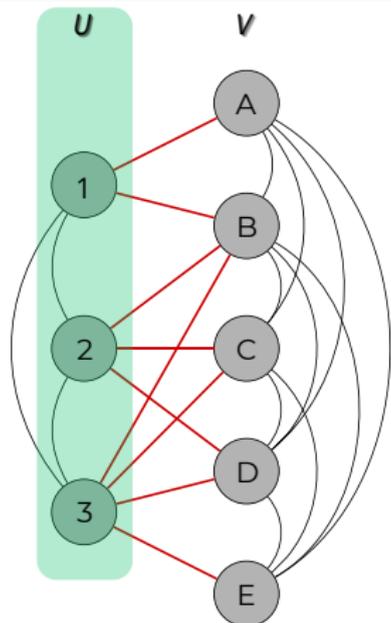
BBK : tirer parti de la bipartition

→ \tilde{G} trop dense : utiliser les **voisinages bipartis** ;

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch



→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

BBK : tirer parti de la bipartition

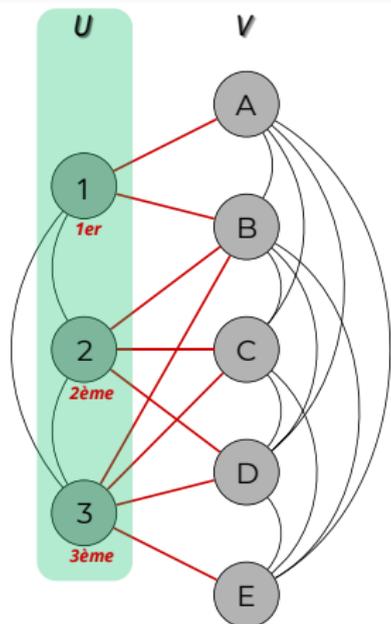
→ \tilde{G} trop dense : utiliser les **voisinages bipartis** ;

→ Initialiser la recherche sur **les sommets de U** ;

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bron-Kerbosch sur le graphe étendu \tilde{G}

Énumérer les cliques maximales : Bron-Kerbosch



→ Énumérer les cliques de chaque sommet : Eppstein et al. (2010).

BBK : tirer parti de la bipartition

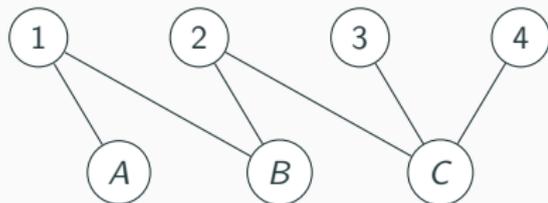
- \tilde{G} trop dense : utiliser les **voisinages bipartis** ;
- Initialiser la recherche sur **les sommets de U** ;
- **Ordre par bidégénérescence** des sommets de U .

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bidégénérescence

Voisinage projeté de $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$

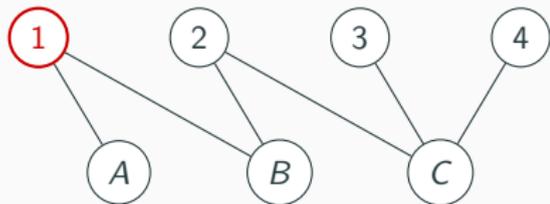


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bidégénérescence

Voisinage projeté de $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$

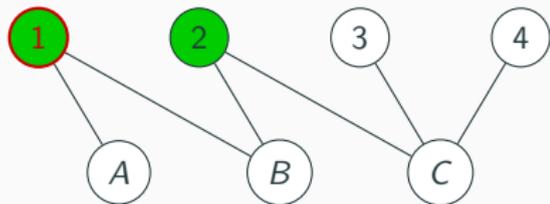


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bidégénérescence

Voisinage projeté de $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$

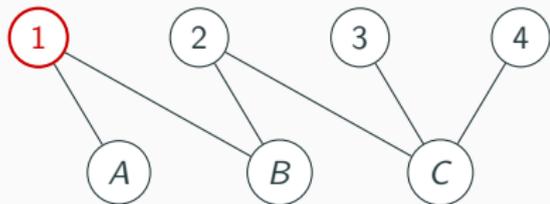


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bidégénérescence

Voisinage projeté de $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$

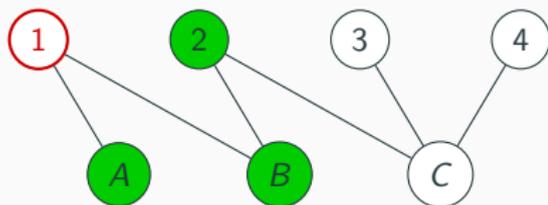


2 - Énumération des bicliques maximales

> Bidégénérescence

Voisinage projeté de $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$



Ordre par bidégénérescence – procédure de construction

Si u_1, \dots, u_i déjà traités, choisir u_{i+1} qui minimise la taille de l'ensemble des candidats :

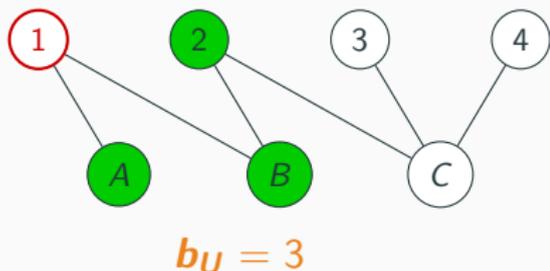
$$Cand(u) = N(u) \cup N_2(u) \setminus \{u\} \setminus \{u_1, \dots, u_i\}.$$

2 - Énumération des bicliques maximales

> Bidégénérescence

Voisinage projeté de $u \in U$

$$N_2(u) = \bigcup_{v \in N(u)} N(v)$$



Ordre par bidégénérescence – procédure de construction

Si u_1, \dots, u_i déjà traités, choisir u_{i+1} qui minimise la taille de l'ensemble des candidats :

$$Cand(u) = N(u) \cup N_2(u) \setminus \{u\} \setminus \{u_1, \dots, u_i\}.$$

b_U = bidégénérescence de U : taille max. d'un ensemble de candidats.

2 - Énumération des bicliques maximales

> Complexités

Complexité en fonction de l'entrée

L'algorithme BBK s'exécute en $\mathcal{O}(n_U \cdot b_U \cdot 3^{b_U/3})$.

où : n_U : nombre de sommets de U ;
 b_U : bidégénérescence.

2 - Énumération des bicliques maximales

> Complexités

Complexité en fonction de l'entrée

L'algorithme BBK s'exécute en $\mathcal{O}(n_U \cdot b_U \cdot 3^{b_U/3})$.

où : n_U : nombre de sommets de U ;
 b_U : bidégénérescence.

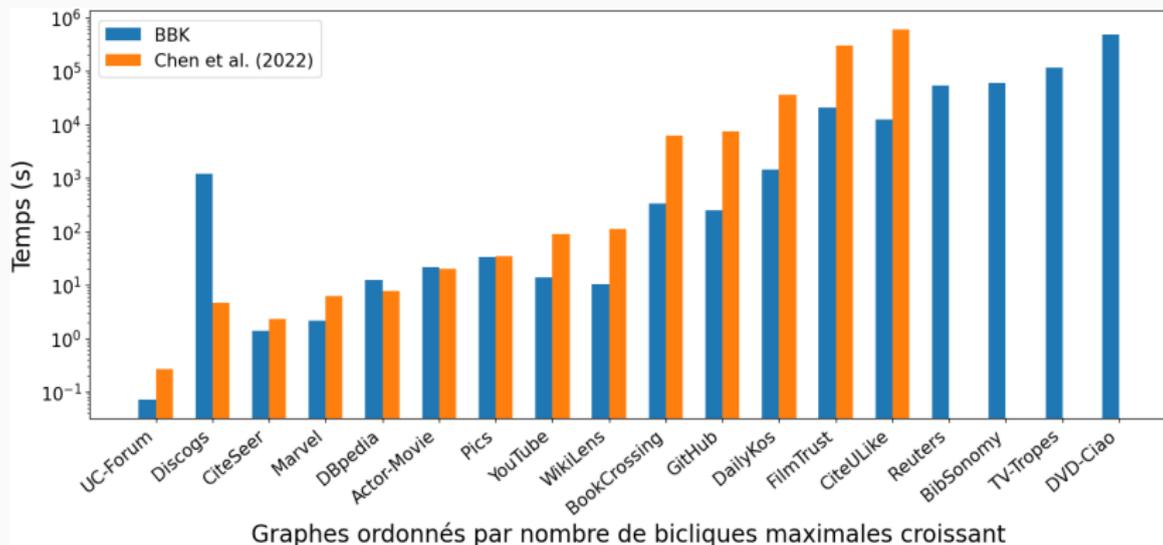
Complexité en fonction de la sortie

L'algorithme BBK s'exécute en $\mathcal{O}(\frac{1}{r} \cdot b_U^2 \cdot q \cdot \mathcal{B})$.

où : \mathcal{B} : nombre de bicliques maximales ;
 q : taille maximale d'une biclique ;
 $1 \leq \frac{1}{r} \leq 2^q$, mais $\frac{1}{r} \simeq 1$ en pratique.

2 - Énumération des bicliques maximales

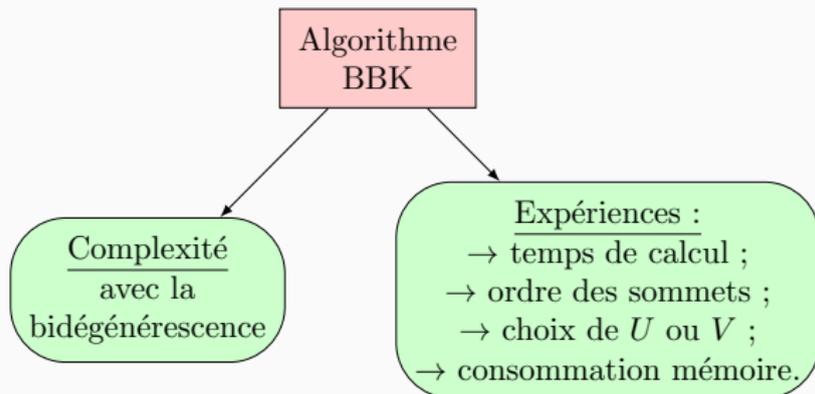
> Expériences



2 - Énumération des bicliques maximales

> Conclusion

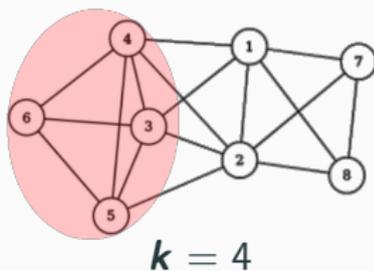
Passage à l'échelle de l'énumération des bicliques maximales aux graphes bipartis massifs issus du monde réel.



3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)

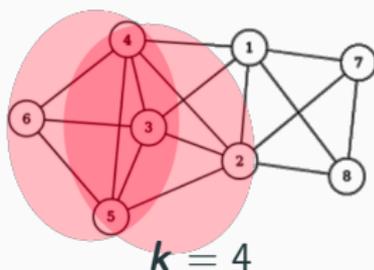


k -clique

Clique à k sommets.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



k -clique

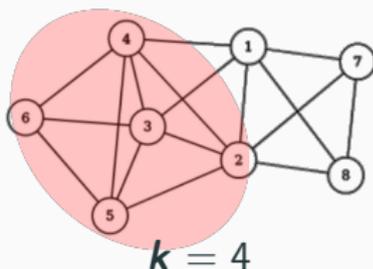
Clique à k sommets.

Règle de regroupement

Deux k -cliques sont adjacentes si elles partagent $k - 1$ sommets.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



k -clique

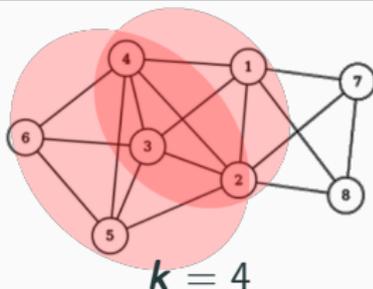
Clique à k sommets.

Règle de regroupement

Deux k -cliques sont adjacentes si elles partagent $k - 1$ sommets.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



k -clique

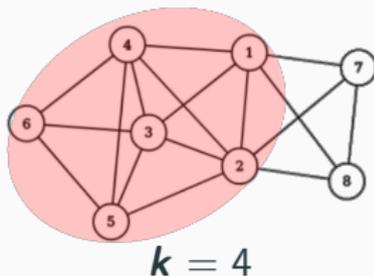
Clique à k sommets.

Règle de regroupement

Deux k -cliques sont adjacentes si elles partagent $k - 1$ sommets.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



k -clique

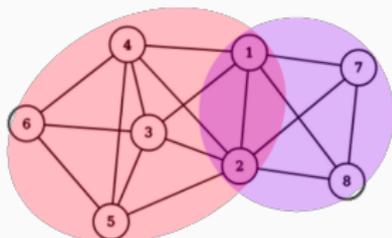
Clique à k sommets.

Règle de regroupement

Deux k -cliques sont adjacentes si elles partagent $k - 1$ sommets.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



$$k = 4$$

k -clique

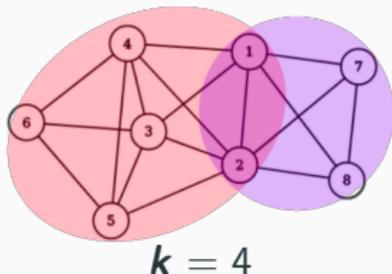
Clique à k sommets.

Règle de regroupement

Deux k -cliques sont adjacentes si elles partagent $k - 1$ sommets.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



k -clique

Clique à k sommets.

Règle de regroupement

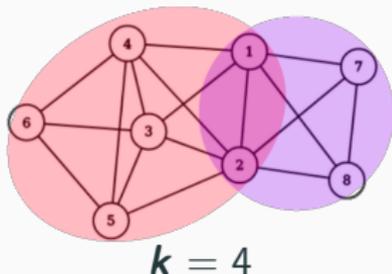
Deux k -cliques sont adjacentes si elles partagent $k - 1$ sommets.

Avantages de cette définition de communautés :

- Définition locale
- Déterministe
- Les communautés peuvent se chevaucher

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Percolation de cliques dans les graphes (CPM)



k -clique

Clique à k sommets.

Règle de regroupement

Deux k -cliques sont adjacentes si elles partagent $k - 1$ sommets.

Avantages de cette définition de communautés :

- Définition locale
- Déterministe
- Les communautés peuvent se chevaucher



Comment étendre CPM aux réseaux temporels ?

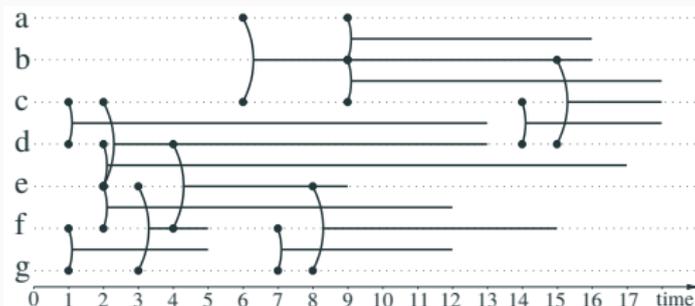
3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec $k = 3$:



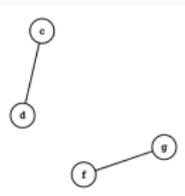
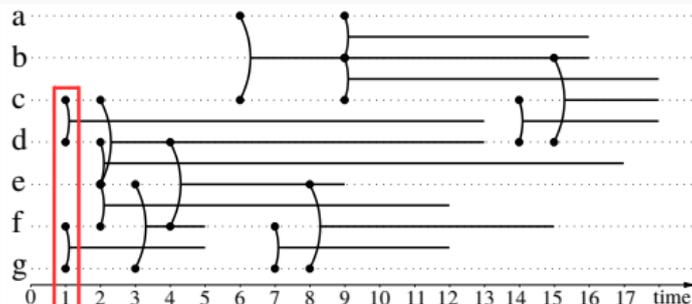
3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec $k = 3$:



$t = 1$

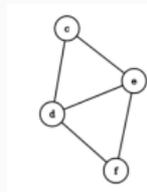
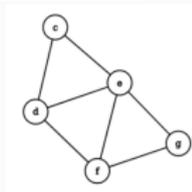
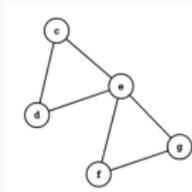
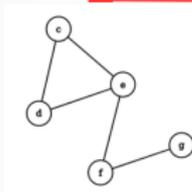
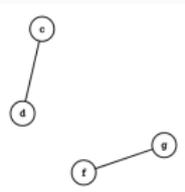
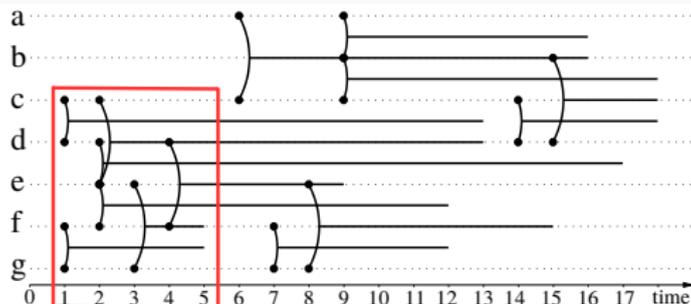
3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec $k = 3$:



$t = 1$

→

$t = 2$

→

$t = 3$

→

$t = 4$

→

$t = 5$

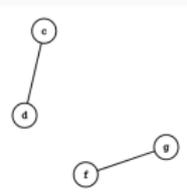
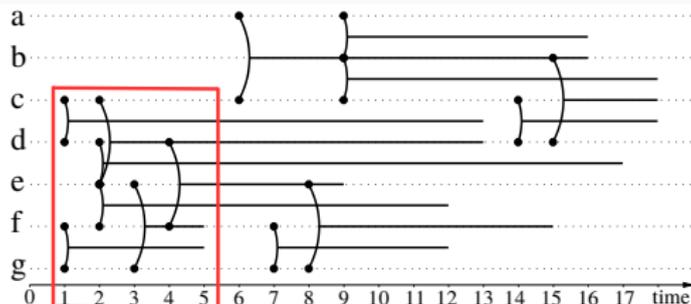
3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

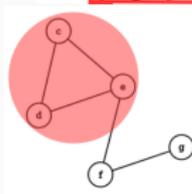
⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

Exemple avec $k = 3$:



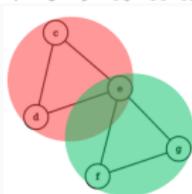
$t = 1$

→



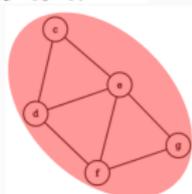
$t = 2$

→



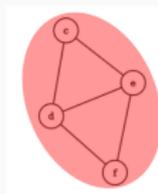
$t = 3$

→



$t = 4$

→



$t = 5$

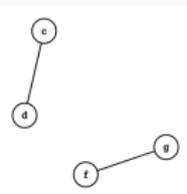
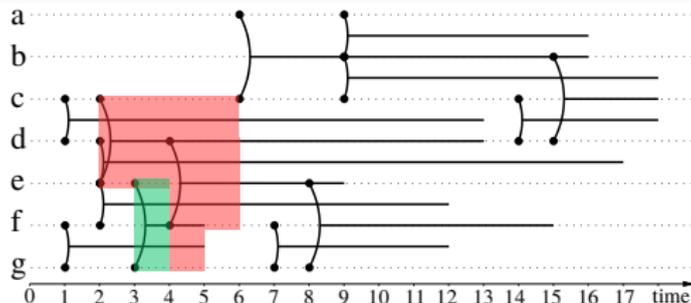
3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

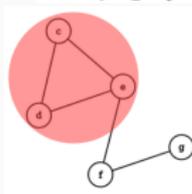
CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

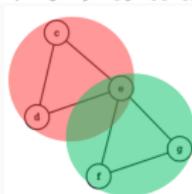
Exemple avec $k = 3$:



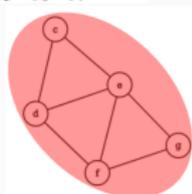
$t = 1$



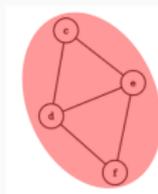
$t = 2$



$t = 3$



$t = 4$



$t = 5$

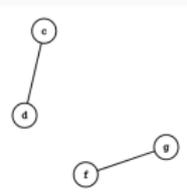
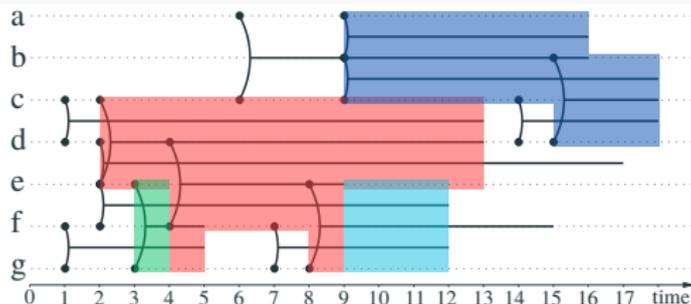
3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

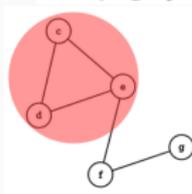
CPM étendue aux **graphes temporels** par *Palla et al. (2007)*

⇒ Communautés CPM qui évoluent d'un pas de temps au suivant

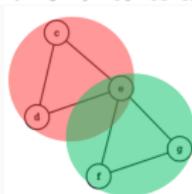
Exemple avec $k = 3$:



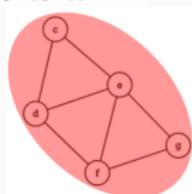
$t = 1$



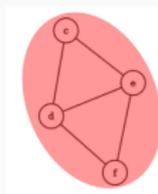
$t = 2$



$t = 3$



$t = 4$

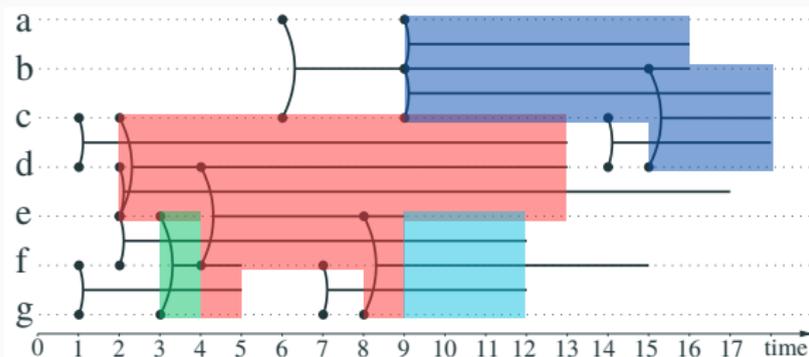


$t = 5$

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

Dynamic CPM (DCPM) :



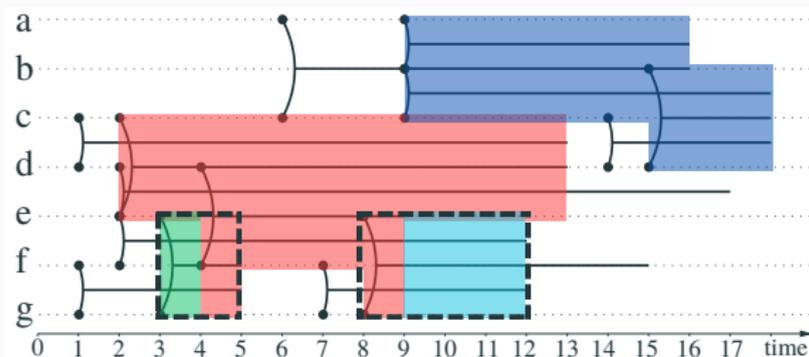
Limites de l'algorithme DCPM :

- Calcule les communautés à chaque pas de temps : **coûteux** ;
- Des données temporelles **qu'on attendrait groupées** ne le sont pas.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Première extension de CPM aux graphes temporels

Dynamic CPM (DCPM) :

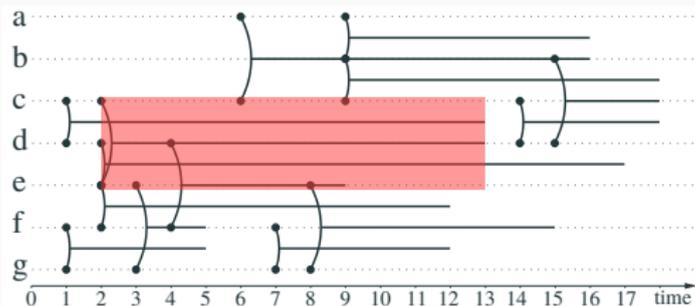


Limites de l'algorithme DCPM :

- Calcule les communautés à chaque pas de temps : **coûteux** ;
- Des données temporelles **qu'on attendrait groupées** ne le sont pas.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



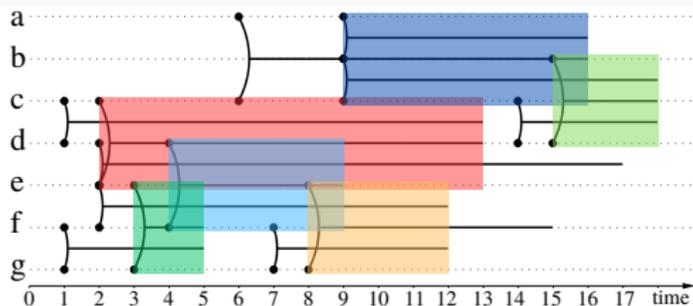
Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

Clique à k sommets, maximale en temps.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



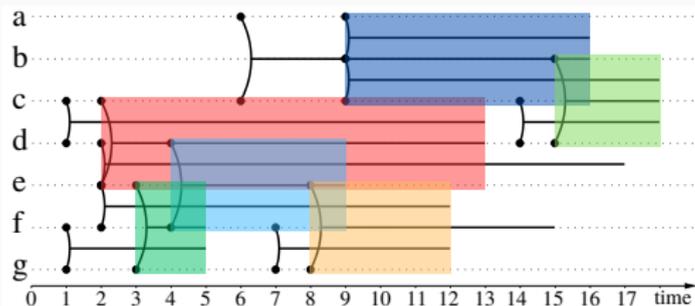
Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

Clique à k sommets, maximale en temps.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

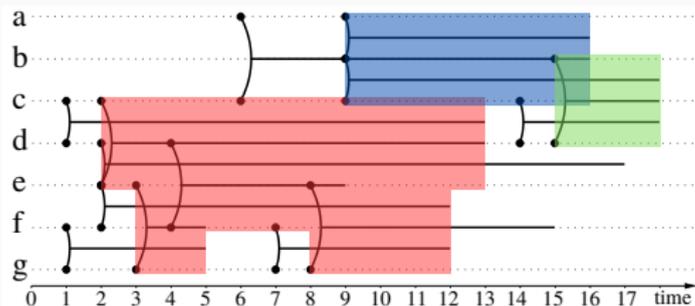
Clique à k sommets, maximale en temps.

Règle de regroupement

k -cliques adjacentes : $k - 1$ sommets communs sur une durée > 0 .

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

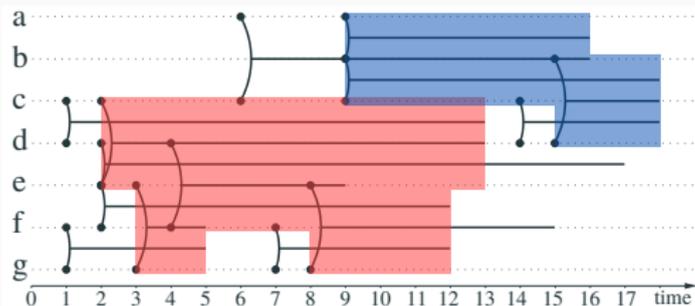
Clique à k sommets, maximale en temps.

Règle de regroupement

k -cliques adjacentes : $k - 1$ sommets communs sur une durée > 0 .

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

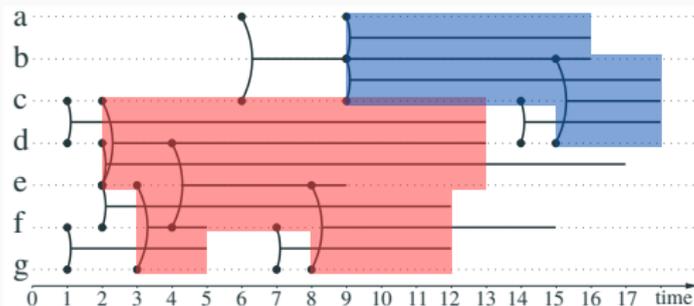
Clique à k sommets, maximale en temps.

Règle de regroupement

k -cliques adjacentes : $k - 1$ sommets communs sur une durée > 0 .

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

Clique à k sommets, maximale en temps.

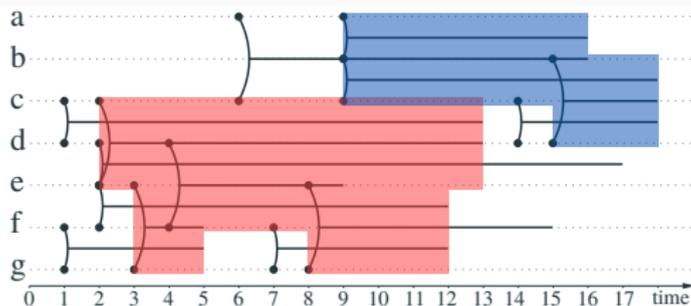
Règle de regroupement

k -cliques adjacentes : $k - 1$ sommets communs sur une durée > 0 .

⇒ Nouvelle structure, Temporal Union-Find :
fusion des communautés sous forme
d'ensembles disjoints de $(k - 1)$ -cliques temporelles.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

Clique à k sommets, maximale en temps.

Règle de regroupement

k -cliques adjacentes : $k - 1$ sommets communs sur une durée > 0 .

⇒ Nouvelle structure, Temporal Union-Find :

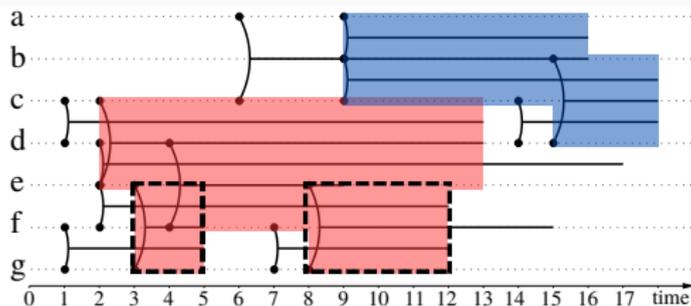
fusion des communautés sous forme

d'ensembles disjoints de $(k - 1)$ -cliques temporelles.

Les communautés LSCPM sont des **unions** de communautés DCPM

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM : étendre CPM aux flots de liens



Exemple avec $k = 3$.

k -clique dans un flot de liens

Clique à k sommets, maximale en temps.

Règle de regroupement

k -cliques adjacentes : $k - 1$ sommets communs sur une durée > 0 .

⇒ Nouvelle structure, Temporal Union-Find :

fusion des communautés sous forme

d'ensembles disjoints de $(k - 1)$ -cliques temporelles.

Les communautés LSCPM sont des **unions** de communautés DCPM

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

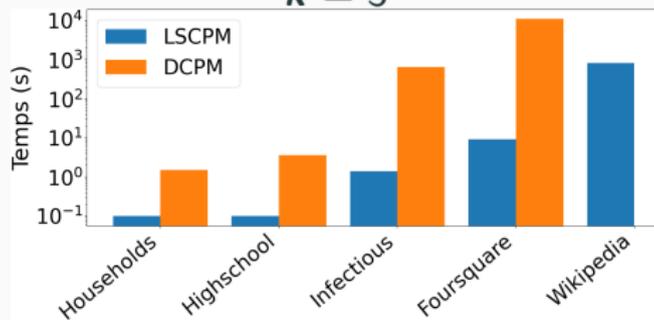
> Expériences sur flots de liens du monde réel

Jeux de données

Flot de liens	# liens
<i>Households</i>	2,136
<i>Highschool</i>	5,528
<i>Infectious</i>	44,658
<i>Foursquare</i>	268,472
<i>Wikipedia</i>	39,953,380

Temps de calcul

$k = 3$



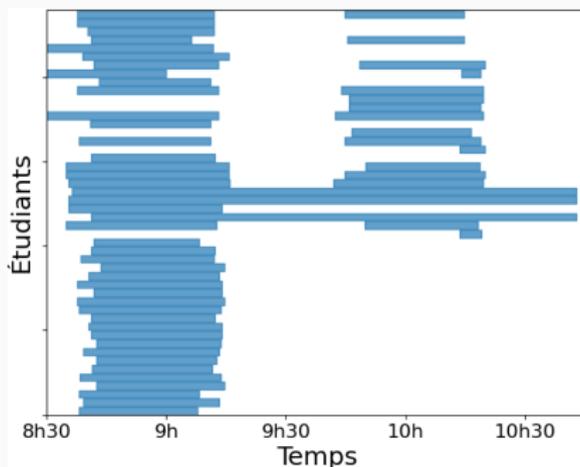
3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> Exemple d'une communauté LSCPM

Jeux de données "Highschool" (SocioPatterns)

- 5 classes préparatoires, Marseille ;
- une semaine d'enregistrement de contacts des étudiants.

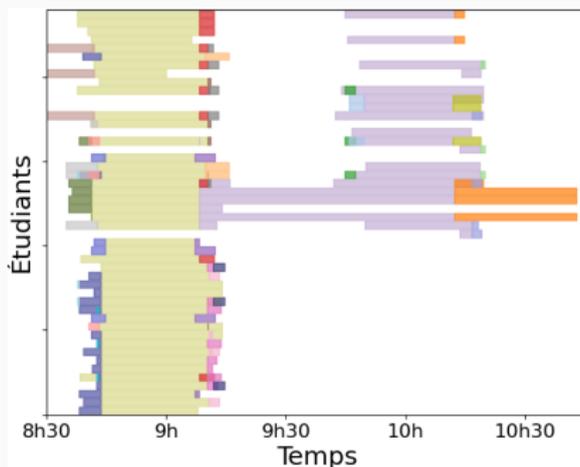
Une communauté LSCPM de Highschool :



3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

> LSCPM communities are union of DCPM communities

Une communauté LSCPM de Highschool :



Couleurs = communautés DCPM.

→ Agrège plus les communautés temporelles.

3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

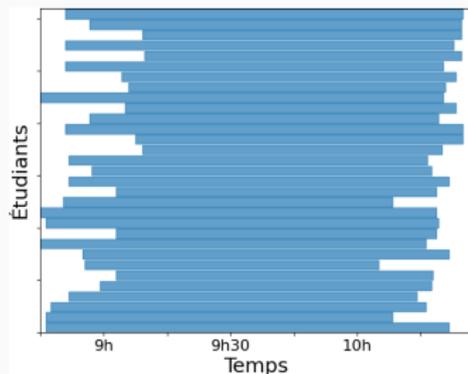
> Taux de dynamicité

Taux de dynamicité

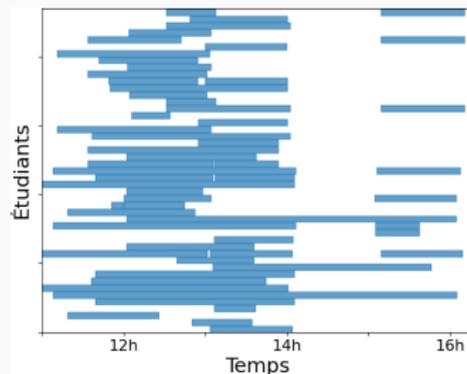
Si C est une communauté temporelle :

$$t_d(C) = 1 - \frac{\text{durée moyenne des sommets dans } C}{\text{durée de } C}$$

Faible dynamicité (0,16)



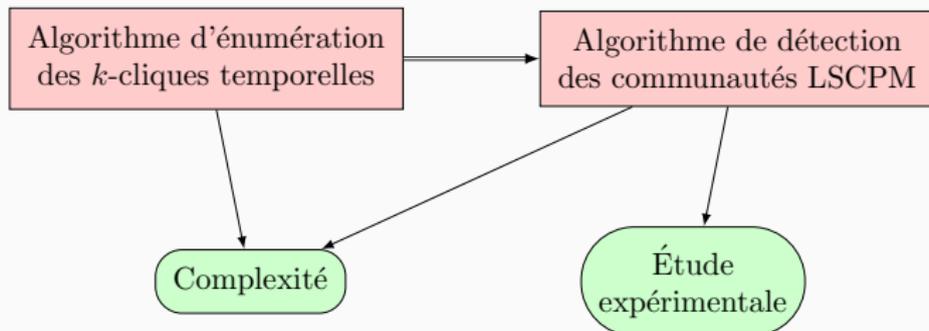
Forte dynamicité (0,64)



3 - Percolation de cliques dans les flots de liens

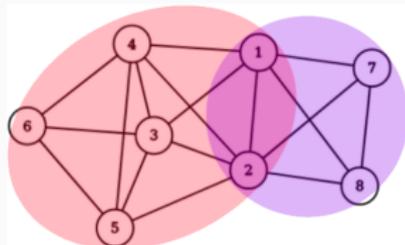
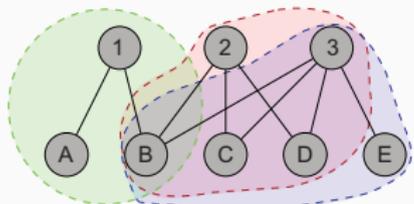
> Conclusion

Extension de CPM aux flots de liens

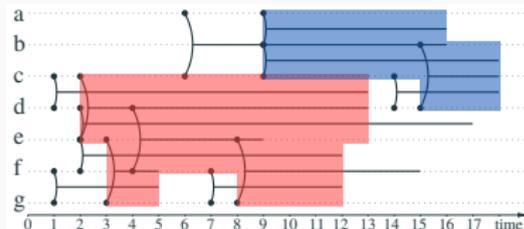
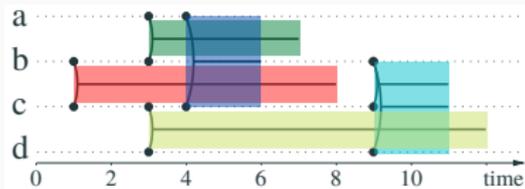


4 - Conclusion et perspectives

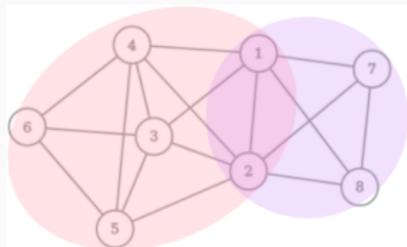
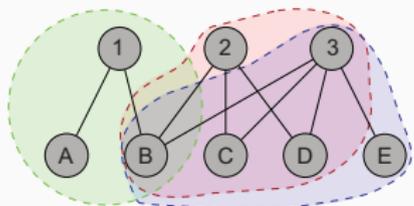
4 - Conclusion et perspectives



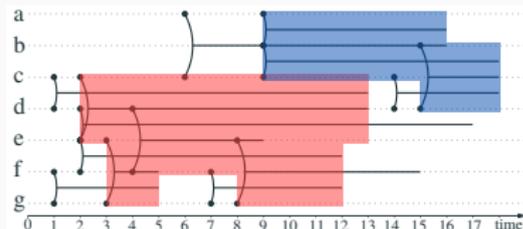
	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>



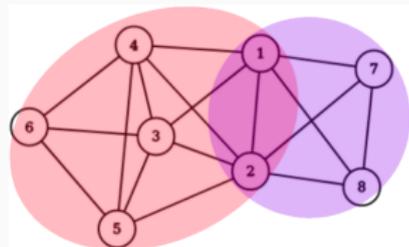
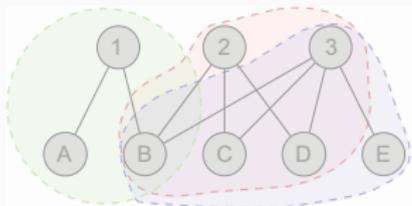
4 - Conclusion et perspectives



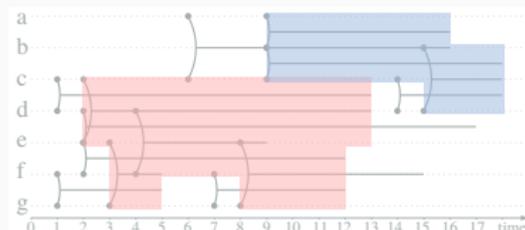
	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>



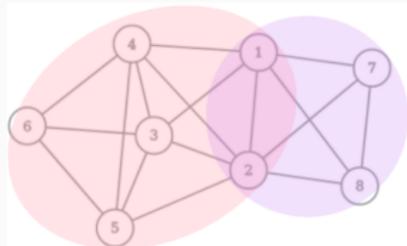
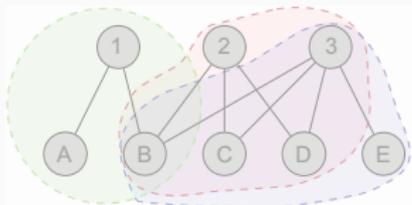
4 - Conclusion et perspectives



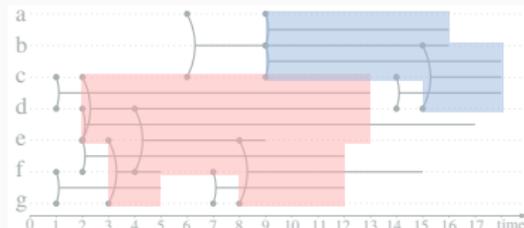
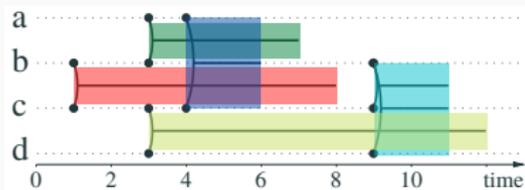
	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>



4 - Conclusion et perspectives



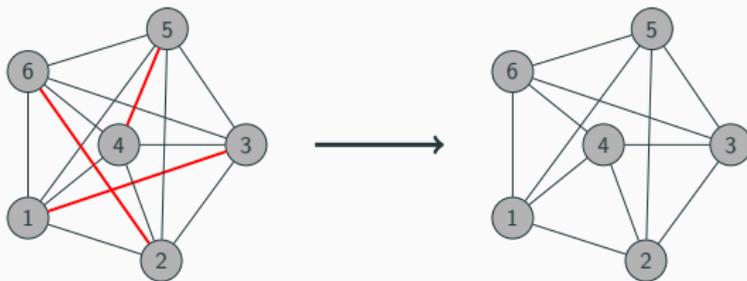
	Énumération de cliques	Détection de communautés
Statique	<i>Bicliques maximales graphes bipartis</i>	<i>Percolation de cliques graphes [Bau+22]</i>
Temporel	<i>Cliques maximales flots de liens [BMT23]</i>	<i>Percolation de cliques flots de liens [BTM23]</i>



4 - Conclusion et perspectives

Perspectives

Relaxer la définition
de clique.



Cliques statiques et temporelles : algorithmes d'énumération et de détection de communautés

Alexis BAUDIN

14 décembre 2023

Soutenance de thèse

Thèse encadrée par Clémence MAGNIEN et Lionel TABOURIER

